



Cohomologie des variétés feuilletées

Christophe Jaloux

► To cite this version:

Christophe Jaloux. Cohomologie des variétés feuilletées. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT: . tel-00358710

HAL Id: tel-00358710

<https://theses.hal.science/tel-00358710>

Submitted on 4 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 350 - 2007

Année 2007

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON I

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

présentée et soutenue publiquement le 20 décembre 2007 par

Christophe JALOUX

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Cohomologie des variétés feuilletées

Rapporteurs : Moulay-Tahar Benameur Université de Metz
James L. Heitsch Northwestern University

Jury : Thierry Fack Directeur
Saad Baaj Université Blaise Pascal
Moulay-Tahar Benameur Université de Metz
Alain Connes Collège de France
Pierre Julg Université d'Orléans
Jean-Marie Morvan Université Lyon 1

Résumé :

La cohomologie longitudinale d'un feuilletage mesuré a été introduite par *A. Connes* [15]. Cette thèse examine les relations entre la cohomologie longitudinale d'un feuilletage mesuré et les points critiques d'une fonction de Morse généralisée. *A. Connes* et *T. Fack* ont montré dans ce cadre l'analogue des inégalités de Morse reliant les mesures transverses c^q des variétés critiques d'indice q , et les nombres de Betti mesurés β_q correspondants [17]. Dans cette thèse, nous associons à toute fonction de Morse généralisée un complexe longitudinal, que nous appelons « complexe d'orientation feuilleté », et nous établissons que ce complexe calcule exactement la cohomologie longitudinale du feuilletage mesuré.

L'espace d'indice q du complexe d'orientation feuilleté est donné par le champ d'espaces $E^q = (l^2(C^q \cap L))_L$, où C^q est la variété des points critiques longitudinaux d'indice q de la fonction de Morse généralisée f , et où L désigne la feuille générique du feuilletage. Les différentielles $\delta^q : E^q \rightarrow E^{q+1}$ expriment comment l'orientation de la variété instable se transporte le long d'une trajectoire du champ de gradient feuilleté reliant un point critique d'indice q à un point critique d'indice $q+1$ sur la feuille L . En utilisant des techniques de tunnelling, nous montrons que le complexe d'orientation feuilleté peut être vu comme la limite, lorsque $\tau \rightarrow \infty$ d'un complexe feuilleté $(W_{\tau,L}^q, d_{\tau,L}^q)$ considéré par *A. Connes* et *T. Fack*. Dans le cas d'une variété classique (sans feuilletage), ce complexe a été introduit par *E. Witten*, et nous l'appellerons ici « complexe de Witten feuilleté ». L'espace $W_{\tau,L}^q$ est l'espace spectral du Laplacien de Witten feuilleté $\Delta_{\tau,L}^q = d_{\tau,L}^{q-1} d_{\tau,L}^{q-1*} + d_{\tau,L}^{q*} d_{\tau,L}^q$ correspondant à des énergies inférieures à un niveau E fixé. C'est un espace de q -formes sur la feuille L . La différentielle du complexe de Witten feuilleté est définie par : $d_{\tau,L}^q = e^{-\tau f} d_L^q e^{\tau f}$, où d_L^q est la différentielle de De Rham longitudinale. En utilisant un principe de concentration des formes de $W_{\tau,L}^q$ autour des sections de $C^q \cap L$ quand τ est suffisamment grand, on montre que les modules associés au complexe d'orientation feuilleté sont isomorphes à ceux du complexe de Witten feuilleté. Modulo cette identification, on vérifie que la différentielle $d_{\tau,L}^q$ tend, en un sens que nous préciserons, vers la différentielle d'orientation δ_L^q quand τ tend vers ∞ . Ceci suffit à construire un isomorphisme entre les deux cohomologies, en s'inspirant du cas classique traité par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* [46].

La construction du complexe d'orientation feuilleté n'est nullement évidente. Elle nécessite en particulier de contrôler « génériquement » le nombre de trajectoires du gradient feuilleté reliant deux points critiques d'indice q et $q+1$, ce que nous faisons en choisissant une métrique adaptée à l'aide d'un résultat de densité de *M. Pozniak*.

Mots-clés : Cohomologie, feuilletage mesuré, complexe de De Rham, complexe de Witten, complexe d'orientation.

Abstract :

The longitudinal cohomology of a measured foliation was introduced by *A. Connes* [15]. This thesis studies the link between the longitudinal cohomology of a measured foliation and the critical points of a generalized Morse function. *A. Connes* and *T. Fack* shown, in this framework, the analogous of the Morse inequalities linking the transverse measures c^q of the critical locus of index q and the corresponding measured Betti's numbers β_q [17]. In this thesis, we associate a longitudinal complex to each generalized Morse function, called « orientation foliated complex », and we establish that the cohomology computed by this complex is exactly the longitudinal cohomology of the measured foliation.

The q index space of the oriented foliated complex is given by the field $E^q = (l^2(C^q \cap L))_L$, where C^q denotes the manifold of the q index longitudinal critical points of the generalized Morse function, and where L is a generic leaf of the foliation. The differential $\delta^q : E^q \rightarrow E^{q+1}$ is defined by studying how the orientation of the unstable manifold is carried along a trajectory linking a q index critical point and a $q + 1$ index critical point on the leaf L . Using tunnelling technics, we show that the oriented foliated complex can be seen as the limit, when $\tau \rightarrow \infty$, of a foliated complex $(W_{\tau,L}^q, d_{\tau,L}^q)$ considered by *A. Connes* and *T. Fack*. In the case of a classic manifold (without foliation), this complex was introduced by *E. Witten*, and we name it here « Witten foliated complex ». The space $W_{\tau,L}^q$ is the spectral space of the foliated Witten's Laplacian $\Delta_{\tau,L}^q = d_{\tau,L}^{q-1} d_{\tau,L}^{q-1*} + d_{\tau,L}^{q*} d_{\tau,L}^q$ corresponding to energies lower than a level E fixed. This is a space of q -forms on the leaf L . The foliated Witten's differential is defined by $d_{\tau,L}^q = e^{-\tau f} d_L^q e^{\tau f}$, where d_L^q is the longitudinal De Rham's differential. Using the fact that the forms of $W_{\tau,L}^q$ concentrate around sections of $C^q \cap L$ when τ is large enough, we show that the modules associated to the oriented foliated complex are isomorphic to those of the foliated Witten's complex. Modulo this identification, we prove that the differential $d_{\tau,L}^q$ converges, in a sense that we shall make precise, to the oriented differential δ_L^q when $\tau \rightarrow \infty$. This is enough to construct an isomorphism between the two cohomologies, using the method of *B. Helffer* and *J. Sjöstrand* to prove this result in the classic case [46].

The construction of the orientation foliated complex is not easy at all. It is necessary to control « generically » the number of foliated gradient trajectories linking critical points of index q and $q + 1$, and we make it possible by choosing an adapted metric using a density result of *M. Pozniak*.

Keywords : Cohomology, measured foliation, De Rham's complex, Witten's complex, oriented complex.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Table des matières	iii
Table des figures	viii
Introduction	1
1 Feuilletages mesurés et cohomologie L^2	7
1.1 Feuilletages mesurés	8
1.1.1 Définitions	8
1.1.2 Exemples de feuilletages	10
1.1.3 Groupoïde d'holonomie	11
1.1.4 Mesure transverse	12
1.2 Cohomologie L^2 d'un feuilletage mesuré	13
1.2.1 Champ mesurable de carré intégrable	13
1.2.2 Nombres de Betti	15
2 Fonction de Morse feuilletée et variété critique associée	17
2.1 Fonction de Morse feuilletée généralisée	18
2.1.1 Singularités feuilletés	18
2.1.2 Généricité des fonctions de Morse presque partout	19
2.1.3 Généricité des fonctions de Morse feuilletées généralisées	23
2.1.4 Propriétés des ensembles critiques	24
2.2 Formes normales de la fonction et de la métrique	25
2.2.1 Etude en dehors d'un voisinage de la caustique	26
2.2.2 Etude au voisinage de la caustique	26
2.2.3 Voisinage tubulaire de la variété critique	27
2.2.4 Description du voisinage tubulaire à l'aide de la distance d'Agmon	29
2.3 Champ de gradient feuilleté et trajectoires associées	31
2.3.1 Définition du champ de gradient feuilleté	32
2.3.2 Propriétés du champ	32
2.3.3 Variétés stables et instables	34
2.3.4 Premières propriétés des trajectoires	35

2.3.4.1	Propriétés de l'énergie des trajectoires	36
2.3.4.2	Borne uniforme pour la longueur des trajectoires	36
2.3.4.3	Majoration du nombre de points d'indice $q + 1$ reliés à un point fixé d'indice q	43
3	Hypothèses sur les trajectoires et métrique adaptée	45
3.1	Résultats sur la transversalité	46
3.1.1	Transversalité du champ et bonnes métriques	46
3.1.1.1	Définitions	46
3.1.2	Densité des champs transverses	47
3.1.2.1	Champ de Kupka-Smale	47
3.1.2.2	Champ de Morse-Smale	48
3.1.2.3	Résultat de densité de Pozniak	49
3.2	Densité des métriques vérifiant la condition de transversalité dans le cas feuilleté	49
3.2.1	Densité des bonnes métriques localement	50
3.2.1.1	Bonne métrique dans un « voisinage » transverse	51
3.2.1.2	Le caractère ouvert transversalement de la condition de transversalité pour les métriques	53
3.2.1.3	Déformation de la métrique dans une carte locale	54
3.2.2	Densité des bonnes métriques globalement	55
3.3	Déformation de la métrique adaptée au cas feuilleté	56
3.4	Propriétés des trajectoires pour une bonne métrique	59
3.4.1	Finitude du nombre de trajectoires entre deux points	59
3.4.2	Borne uniforme pour le nombre de trajectoires reliant deux points critiques d'indices voisins	60
4	Le complexe d'orientation	65
4.1	Construction du complexe d'orientation dans le cas classique	66
4.1.1	Résultats préliminaires	66
4.1.1.1	Orientation des variétés stables et instables	66
4.1.1.2	Un peu de théorie du transport parallèle	67
4.1.1.3	Transport d'orientation	68
4.1.1.4	Orientation de l'orthogonal d'un vecteur	69
4.1.2	Principe de la construction	69
4.1.3	Construction détaillée	70
4.1.4	Nombre d'orientation et opérateur d'orientation	72
4.1.5	Invariance par rapport au choix de l'orientation	72
4.2	Exemples dans le cas du tore à un trou	73
4.2.1	Premier exemple	74
4.2.1.1	Orientation naturelle de la variété	75
4.2.1.2	Orientation quelconque de la variété	78
4.2.2	Second exemple	79
4.2.2.1	Orientation naturelle de la variété	80
4.2.2.2	Orientation quelconque de la variété	82

4.2.3	Conclusion	84
4.3	Complexe d'orientation feuilleté	85
4.3.1	Problématique	85
4.3.2	Champ de complexes	85
4.3.3	Etude de l'opérateur d'orientation ∂	86
4.3.4	Le complexe d'orientation est un complexe	89
4.3.4.1	Principe de la preuve	89
4.3.4.2	Correspondance bijective entre les bords de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ et des paires de trajectoires	90
4.3.4.3	Compensation des contributions pour chaque paire	93
5	Complexe de Witten feuilleté et base adaptée	97
5.1	Complexe de Witten feuilleté	98
5.1.1	Laplacien de Witten feuilleté	98
5.1.2	Première déformation du complexe	100
5.1.3	Seconde déformation du complexe	100
5.1.3.1	Principe de la déformation dans le cas classique	100
5.1.3.2	Adaptation de la déformation au cas feuilleté	101
5.2	Base adaptée en dehors d'un voisinage de la caustique	103
5.2.1	Résultats préliminaires	103
5.2.2	Perturbations des états propres	105
5.2.3	Construction de la base adaptée feuilletée	106
5.3	Base adaptée dans le voisinage de la caustique	107
5.4	Etude de l'opérateur $H_1^q(\tau)$	109
5.4.1	Simplification de l'opérateur	110
5.4.2	Le problème des bornes	111
5.4.3	Etude globale du potentiel $V(x, h)$	111
5.4.3.1	Positivité du potentiel en dehors de l'intervalle $\left[-2^{-\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{3}}\right]$	112
5.4.3.2	Etude des zéros du potentiel	113
5.4.3.3	Première expression et majoration de l'intégrale	114
5.4.4	Cas $h \geq 2$	116
5.4.4.1	Encadrement du zéro positif	116
5.4.4.2	Encadrement du zéro négatif	117
5.4.4.3	Majoration de l'intégrale	118
5.4.5	Cas $0 \leq h \leq 2$	120
5.4.5.1	Encadrement du zéro positif	120
5.4.5.2	Encadrement du zéro négatif	122
5.4.5.3	Majoration de l'intégrale	123
5.5	Spectre de $H_1^q(\tau)$	126
5.6	Etude du spectre de l'opérateur $H_2^q(\tau)$	127
5.7	Passage de la métrique plate à la métrique ambiante	128
5.8	Isomorphisme entre $l^2(C^q)$ et W_τ^q	130

6	Déformation des complexes de Witten et d'orientation	133
6.1	Déformation de la variété	134
6.1.1	Illustration de la déformation en dimension 3	137
6.1.2	Propriétés de la fonction déformée	138
6.2	Hypothèses sur la métrique et les trajectoires	140
6.3	Complexes de Witten et d'orientation pour la fonction \tilde{f}	141
6.4	Complexe de Witten avant et après déformation	142
6.5	Complexe d'orientation avant et après déformation	146
7	Démonstration du résultat principal	153
7.1	Les hypothèses (H_1) et (H_2)	154
7.1.1	Les hypothèses dans le cas classique	154
7.1.2	Validité des hypothèses dans le cas feuilleté	154
7.2	Approximation de l'opérateur de Witten	156
7.2.1	Principe de l'approximation dans le cas classique	157
7.2.2	Principe de l'approximation dans le cas feuilleté	157
7.2.3	Calcul BKW pour le Laplacien de Witten feuilleté	158
7.2.4	Première estimation des produits scalaires	160
7.3	Démonstration du théorème principal	162
7.3.1	Première injection entre les champs de noyaux	162
7.3.2	Injection dans l'autre sens	166
7.3.3	Fin de la démonstration	169
	Bibliographie	171

Table des figures

1.1	Forme locale d'un feuilletage	9
1.2	Feuilletage de <i>Kronecker</i>	10
1.3	Feuilletage de <i>Reeb</i>	11
2.1	Premier voisinage tubulaire de la variété critique	28
2.2	Voisinage tubulaire de la variété critique	31
2.3	Première décomposition de γ en composantes connexes	38
2.4	Décomposition de γ_q'' en composantes connexes	40
3.1	V_0 et T_0	61
3.2	L'ensemble $K(T_0) \cap P_t$	62
4.1	Tore à un trou	73
4.2	Surface définie par la fonction f	74
4.3	La trajectoire γ reliant A_1^0 et A_3^1 , et les orientations	75
4.4	La trajectoire γ reliant A_1^1 et A_1^2 , et les orientations	76
4.5	Les deux trajectoires γ_1, γ_2 reliant A_3^1 et A_1^2	77
4.6	Surface définie par la fonction f	80
4.7	Famille d'orbites collantes à (γ^1, γ^2)	92
5.1	Tableau de variation de la fonction $x \mapsto V(x, h)$ et de ses dérivées	113
5.2	Graphe de la fonction $I(h)$ pour $h \in [2; 10]$	119
5.3	Graphe de la fonction I pour $h \in [0; 2]$	123
5.4	Graphe des fonctions I_1 et I_2 sur $[0; 2]$	124
6.1	Forme locale de la variété critique	135
6.2	Les ensembles $T_{a_1, b}$ et $T_{a_2, b}$	135
6.3	Image du feuilletage par la déformation α	136
6.4	Vue en coupe des feuilles après déformation	137
6.5	La variété critique $\tilde{\Sigma}$ dans une carte de naissance-mort	139

Introduction

Le but de ce travail est d'utiliser la théorie de Morse des variétés feuilletées pour calculer la cohomologie de De Rham d'une telle variété. Plus précisément, nous montrons que la cohomologie de De Rham d'une variété feuilletée est isomorphe à la cohomologie d'un complexe d'orientation défini à partir d'une fonction de Morse feuilletée généralisée.

La notion de cohomologie longitudinale d'un feuilletage mesuré (*i.e.* : muni d'une mesure transverse invariante Λ) a été introduite par *A. Connes*. Elle est définie comme le champ mesurable d'espaces de Hilbert $H_L = \text{Ker } \Delta_L$ le long des feuilles, où Δ_L désigne le Laplacien associé à une métrique Riemannienne sur la variété M . Le champ $(H_L^q)_L$ est un champ de carré intégrable et sa dimension de Murray Von-Neumann est appelée le q -ième nombres de Betti du feuilletage :

$$\beta^q = \dim_{\Lambda} \text{Ker } \Delta^q$$

A. Connes et *T. Fack* ont montré l'analogie des inégalités de Morse dans le cas feuilleté. A cet effet, ils ont dégagé une notion de fonction de Morse généralisée feuilletée. La notion de fonction de Morse en restriction à chaque feuille est ici insuffisante car elle implique l'existence de transversales fermées, ce qui est trop restrictif. Heureusement, grâce à un résultat de *K. Igusa*, il est possible de définir une notion de fonction de Morse généralisée présentant uniquement des singularités longitudinales de Morse, ou de naissance-mort (cubique), et qui conserve un caractère générique.

Pour prouver les inégalités de Morse, *A. Connes* et *T. Fack* ont utilisé une méthode introduite par Witten dans le cas classique et qui consiste à déformer la différentielle d de De Rham à l'aide d'une fonction de Morse généralisée feuilletée en posant :

$$d_{\tau} = e^{-\tau f} d e^{\tau f}$$

C'est l'analyse spectrale du Laplacien $\Delta_{\tau}^q = d_{\tau}^{q*} d_{\tau}^q + d_{\tau}^{q-1} d_{\tau}^{q-1*}$ associé à cette fonction f , lorsque le paramètre τ tend vers $+\infty$, qui permet de démontrer les inégalités de Morse feuilletées.

Dans le cas classique, l'opérateur d_{τ} converge, lorsque τ tend vers $+\infty$, vers un opérateur δ qui est défini sur l'espace $\bigoplus_{0 \leq q \leq n} \mathbb{C}^{c_q}$ où c_q est le nombre de points de Morse d'indice

q de la fonction et n la dimension de la variété. Cet opérateur δ peut être défini indépendamment en faisant intervenir les trajectoires γ du champ de gradient reliant deux points critiques x et y d'indice respectifs q et $q + 1$. Formellement, on a :

$$\delta^q x = \sum_{y \in C^{q+1}} \#(x; y) y \quad (0 \leq q \leq n)$$

où $\#(x; y) = \sum_{\gamma: x \rightarrow y} n_\gamma$ et où $n_\gamma = \pm 1$ selon la manière dont γ transporte l'orientation de la variété instable $T_x W^u(x)$ jusqu'au point y .

Pour définir correctement δ , il nous faut vérifier qu'il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires reliant x à y . Avec cette condition et en utilisant les idées de *E. Witten*, *B. Helffer* a démontré que la cohomologie de De Rham coïncide avec celle du complexe d'orientation. C'est ce résultat que nous allons généraliser au cas des variétés feuilletées munies d'une mesure transverse invariante, en utilisant une fonction de Morse généralisée feuilletée.

Nous allons maintenant détailler la démarche que nous avons utilisé pour obtenir notre théorème principal.

Théorème 0.1 *Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage mesuré de dimension p sur une variété compacte M . Pour toute fonction de Morse généralisée feuilletée, les cohomologies du complexe de De Rham et du complexe d'orientation sont isomorphes.*

La notion de fonction de Morse généralisée feuilletée utilisée est celle de *Connes-Fack* [17]. La restriction d'une telle fonction f à chaque feuille ne possède qu'un nombre dénombrable de points critiques de Morse ou de naissance-mort (et pas forcément un nombre fini comme dans le cas classique), et ces points critiques forment un ensemble discret sur la feuille. Les variétés critiques C^q des points critiques de Morse d'indice q sont transverses aux feuilles en dehors d'un ensemble Λ -négligeable de feuilles, appelées les feuilles critiques, et qui sont celles pour lesquelles la restriction de la fonction f présente aussi des singularités de naissance-mort.

Dans notre cas, l'analogue des espaces \mathbb{C}^{c_q} du cas classique (variété sans feuilletage) est le champ mesurable d'espaces de Hilbert :

$$l^2(C^q) = (l^2(C^q \cap L))_L$$

Pour définir δ_L , il nous faut, comme dans le cas classique, assurer que le nombre de trajectoires reliant deux points critiques fixés sur une même feuille est borné par une constante, qui doit être en plus indépendante des feuilles. En outre, il nous faut assurer que le nombre de points critiques d'indice $q + 1$ reliés par une trajectoire du gradient feuilleté à un point critique d'indice q fixé est lui-même borné par une constante indépendante des feuilles.

A cet effet, nous montrons (théorème 3.3.1) qu'il est possible de choisir des métriques génériques qui assurent que les trajectoires du champ de gradient feuilleté de f associé

à ces métriques vérifient les deux conditions de finitude ci-dessus. Pour ce faire, nous utilisons de façon cruciale un résultat de densité de *M. Pozniak*. Au total, cela nous permet de définir correctement le complexe d'orientation :

$$\delta_L^q : l^2(C^q \cap L) \rightarrow l^2(C^{q+1} \cap L)$$

La question est alors de comparer la cohomologie de ce complexe avec celle du complexe de De Rham, donnée par le champ $H^{DR} = (\text{Ker } \Delta_L^{DR})_L$. Des travaux d'*A. Connes* et de *T. Fack*, il résulte que :

$$H_L^{DR} \cong H_L^\tau$$

où $H_L^\tau = \text{Ker } \Delta_L^\tau$ est le noyau du Laplacien de Witten Δ_L^τ associé à l'opérateur de différentiation de Witten d_L^τ . De plus, les solutions de $\Delta_L^{\tau q} \omega = 0$ sont des formes de degré q sur L qui se localisent au voisinage de la variété critique C^q . Pour démontrer notre résultat principal, il nous faut établir que le champ $H^\tau = (H_L^\tau)_L$ est isomorphe au champ $H^{Or} = (H_L^{Or})_L$ où $H_L^{Or} = \text{Ker } \Delta_L^{Or}$ est le noyau du Laplacien d'orientation Δ_L^{Or} associé à l'opérateur d'orientation δ .

Comme d_L^τ opère naturellement (en tant qu'opérateur borné) sur l'espace propre $W_{\tau,L} = \text{Im } E_{]-\infty;A]}(\Delta_L^\tau)$ (avec A une constante strictement positive fixée) et que les formes ω_L^τ appartenant à $W_{\tau,L}$ se localisent autour de $C^q \cap L$, nous avons un isomorphisme presque immédiat entre les champs $l^2(C^q)$ et W_τ . Toutefois, ce phénomène de localisation dépend de la taille de τ dès lors que la feuille considérée est très proche d'une feuille critique (contenant des points critiques de naissance-mort). Cette circonstance rend difficile la localisation des éléments de $W_{\tau,L}$ autour de la variété critique, indépendamment de la feuille L , dès que nous sommes dans un voisinage feuilleté d'une singularité de naissance-mort (une carte de naissance-mort).

La raison de cette difficulté est que l'analyse de la partie basse du spectre de Δ_L^τ , dans une carte de naissance-mort, conduit à un modèle local qui n'est plus un champ d'oscillateurs harmoniques mais un champ d'opérateurs plus compliqués. *A. Connes* et *T. Fack* ont montré que le nombre d'états d'énergie inférieure ou égale à une constante A est borné par une constante indépendante des feuilles dès que $\tau \geq \tau_0$, ce qui suffisait pour prouver les inégalités de Morse feuilletées. Nous montrons dans cette thèse que ce nombre est égal à 1 (proposition 5.7.1), ce qui permet d'identifier naturellement $l^2(C^q \cap L)$ et $W_{\tau,L}$ pour toute feuille non critique.

Pour identifier la cohomologie de De Rham et celle du complexe d'orientation, nous exploitons comme dans *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*, l'approximation suivante, valable pour tout point critique x d'indice q et y d'indice $q+1$ appartenant à une même feuille L :

$$\left\langle \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} d_L^\tau \underline{\omega}_{x,\tau}; \overline{\omega}_{y,\tau} \right\rangle = \langle \delta x; y \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (1)$$

où $\underline{\omega}_{x,\tau}$ et $\overline{\omega}_{y,\tau}$ sont des bases orthogonales (mais pas orthonormales) de $W_{\tau,L}^q$ et $W_{\tau,L}^{q+1}$ respectivement et $O_{\mathcal{F}}$ signifie que l'approximation est vraie indépendamment de la feuille

L considérée. Cette information est obtenue en utilisant une méthode WKB. Nous n'avons pas été capable d'établir directement ce résultat pour le complexe de Witten, à cause des singularités de naissance-mort. Mais il est possible d'adapter une méthode de *J. L. Heitsch* et *C. Lazarov* qui consiste à observer qu'une déformation adaptée du feuilletage permet, sans changer la cohomologie, de se ramener, pour prouver (1), au cas d'une fonction de Morse en restriction à chaque feuille non critique et qui possède la propriété de localisation suivante :

$$\exists \beta_0 > 0 \quad \forall q \quad \forall L \quad d_{Agmon}(C^q \cap L; C^{q+1} \cap L) \geq \beta_0$$

où d_{Agmon} désigne la distance d'Agmon feuilletée. Dès lors, l'estimation (1) devient possible et permet de construire des injections de $\text{Ker } \Delta^{DR}$ dans $\text{Ker } \Delta^{Or}$ et inversement, ce qui permet de montrer finalement le résultat principal.

L'organisation de cette thèse est la suivante. Au chapitre 1, nous rappelons les bases de la théorie des feuilletages ainsi que celle de mesure transverse. La notion de cohomologie de De Rham est une notion bien connue dans le cas des variétés « classiques ». Dans le cas feuilleté, il faut utiliser la notion de champs mesurables pour définir la cohomologie feuilletée de De Rham. Nous rappelons donc cette notion puis nous détaillons la construction du complexe De Rham feuilleté et de la cohomologie associée.

Comme nous l'avons déjà précisé, la notion de fonction de Morse usuelle est insuffisante et nous devons utiliser la notion de fonction de Morse généralisée feuilletée introduite par *A. Connes* et *T. Fack*. Les deux premières sections du chapitre 2 reprennent les résultats principaux de [17] sur la notion de fonction de Morse feuilletée généralisée ainsi que sur la forme locale de ces fonctions. Nous donnons ensuite les définitions et les premières propriétés des trajectoires du champ de gradient feuilleté associé à la fonction considérée. L'un des premiers résultats qui ne nécessite pas d'hypothèses supplémentaires sur la forme de la métrique est l'existence d'une borne uniforme, indépendante des feuilles, pour la longueur des trajectoires (théorème 2.3.1). Cela nous permet d'établir l'existence d'une borne indépendante des feuilles pour le nombre de points critiques d'indice $q + 1$ reliés par une trajectoire du gradient feuilleté à un point d'indice q (proposition 2.3.1).

Pour pouvoir démontrer l'existence d'une borne indépendante des feuilles pour le nombre de trajectoires reliant deux points critiques d'indice q et $q + 1$, nous avons besoin de faire une hypothèse supplémentaire sur la métrique : pour chaque trajectoire γ du champ de gradient reliant deux points x et y d'indice q et $q + 1$, la variété stable en y et la variété instable en x se coupent transversalement. Le chapitre 3 est consacré à la démonstration de ce résultat. En utilisant un résultat de densité de *M. Pozniak*, nous montrons (théorème 3.2.1) la généricité de bonnes métriques, ce qui nous permet d'obtenir la seconde borne cherchée (proposition 3.4.2).

Dans le chapitre 4, nous commençons par détailler la construction du complexe d'orientation dans le cas classique. Cette construction fait appel à la théorie du transport parallèle le long des trajectoires. Pour illustrer le procédé, nous l'appliquons au cas d'une tore à un trou avec différentes fonctions de Morse. Les deux hypothèses sur les trajectoires obtenues dans les chapitres 2 et 3 nous permettent d'étendre la construction du complexe d'orien-

tation au cas feuilletée. En particulier, nous montrons que $\delta^2 = 0$ en adaptant un résultat de *M. Pozniak*.

Le chapitre 5 est consacré à l'identification des champs $l^2(C^q)$ et W_τ^q (théorème 5.8.1). Nous rappelons la définition du complexe de Witten feuilletée ainsi que la construction d'une base adaptée de q -formes pour $W_{\tau,L}^q$ réalisée par *A. Connes* et *T. Fack* pour des feuilles suffisamment loin des feuilles critiques. Pour étendre cette base à (presque) toutes les feuilles (sauf les feuilles critiques), nous utilisons la forme locale de la fonction dans une carte de naissance-mort et nous ramenons le problème à l'étude de la partie basse du spectre d'un opérateur de Schrödinger avec pour potentiel un polynôme dépendant d'un paramètre. Grâce à un résultat de *Berezin-Shubin*, une étude précise du potentiel nous permet alors de conclure. Cette base de formes nous permet finalement d'identifier canoniquement les champs $(l^2(C^q \cap L))_L$ et $(W_{\tau,L}^q)_L$.

Au chapitre 6, nous montrons que la démonstration de notre théorème principal peut être ramenée au cas où la fonction considérée a des singularités de Morse en restriction à presque toute feuille, distantes d'un nombre β_0 indépendant des feuilles. Cette hypothèse nous permettra au chapitre suivant, de comparer $d_{\tau,L}$ et δ_L pour τ suffisamment grand. A cet effet, nous construisons explicitement la déformation de la fonction, en utilisant les idées de *J. L. Heitsch* et *C. Lazarov* [38]. La fonction déformée possède des propriétés similaires à la fonction initiale, ce qui permet de lui associer naturellement un complexe de Witten feuilleté ainsi qu'un complexe d'orientation feuilletée. La fonction initiale n'étant modifiée que localement dans des cartes de type naissance-mort, nous pouvons suivre l'influence de la déformation grâce à des calculs locaux, ce qui nous permet de prouver que les nouveaux complexes calculent la même cohomologie que ceux associés à la fonction initiale (propositions 6.4.1 et 6.5.1).

Le chapitre 7 démontre le résultat principal. Nous généralisons l'approximation (1) au cas feuilletée en s'assurant de la validité des deux hypothèses principales faites dans le cas classiques par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*. Cela découle simplement des hypothèses préalables sur la métrique. La preuve de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* dans le cas classique s'adapte sans trop de peine pour obtenir (1) avec une approximation indépendante des feuilles. Enfin, nous concluons en exhibant deux injections (dans les deux sens) entre les champs de noyaux du Laplacien de De Rham feuilletée et d'orientation feuilletée, ce qui nous permet d'obtenir l'existence d'un isomorphisme entre les cohomologies et achève la démonstration du théorème principal.

Chapitre 1

Feuilletages mesurés et cohomologie L^2

Dans ce premier chapitre, nous définissons le cadre d'étude que nous allons considérer dans toute la suite.

Dans un premier temps, nous rappelons la définition d'un feuilletage puis nous introduisons le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage ainsi que la notion de mesure transverse. Nous considérerons dans toute la suite un feuilletage muni d'une mesure transverse.

Nous définissons enfin la cohomologie L^2 d'un feuilletage mesuré. A cet effet, nous rappelons la notion de champs de carré intégrable et la dimension de Muray-Von Neumann d'un tel champ.

Ce chapitre est un simple survol de la théorie des feuilletages mesurés. Pour plus de détails, nous renvoyons à [28] et [14].

1.1 Feuilletages mesurés

1.1.1 Définitions

Soit M une variété lisse de dimension n . Le terme « lisse » signifiera dans toute la suite de classe \mathcal{C}^∞ . Tous les objets que nous considérerons seront lisses, sauf précisions supplémentaires.

Définition 1.1.1

1. Un atlas $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \phi_i)\}$ de la variété M , où $\phi_i : \Omega_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, est dit un atlas d'un feuilletage de dimension p et de codimension $n - p$ si pour tous i, j tels que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, l'application coordonnée :

$$\phi_{i,j} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \phi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p}$$

est de la forme :

$$\phi_{i,j}(u, t) = (\alpha_{i,j}(u, t); \gamma_{i,j}(t))$$

2. Deux atlas d'un feuilletage de dimension p sont équivalents si leur réunion est encore un atlas de dimension p d'un feuilletage ;
3. Une variété M munie d'une classe d'équivalence \mathcal{F} d'atlas de feuilletage de dimension p est dite une variété munie d'un feuilletage de dimension p ou encore variété feuilletée. Nous dirons aussi que \mathcal{F} est un feuilletage de M .

Le feuilletage \mathcal{F} peut être muni d'une structure de variété de dimension p . Pour cela, il suffit de munir chaque carte locale de la topologie image réciproque de la topologie définie sur $\phi_i(\Omega_i) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-p}$. Dans ce cas, les topologies sur $\Omega_i \cap \Omega_j$ définies comme les images réciproques des topologie induites sur $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega_j)$ et sur $\phi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$ coïncident. Nous obtenons ensuite une topologie sur M tout entier par recollement. Nous pouvons alors définir les feuilles comme les composantes connexes pour cette topologie. On vérifie alors que les applications ϕ_i forment un atlas pour une structure de variété différentielle de dimension p sur M .

Donnons maintenant les définitions des éléments associés au feuilletage \mathcal{F} .

Définition 1.1.2

1. Un couple (Ω, ϕ) appartenant à un atlas d'un feuilletage est dit une carte feuilletée de \mathcal{F} . Dans ce cas, les coordonnées de Ω correspondent aux coordonnées locales feuilletées. Nous dirons parfois que Ω est une carte feuilletée sans préciser l'application associée. Nous écrirons aussi $\Omega = U \times T$ avec U de dimension p et T de dimension $n - p$;
2. Soit $(U \times T, \phi)$ une carte feuilletée. Les composantes connexes de $\phi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{t\})$ sont appelées les plaques du feuilletage. Par abus, nous dirons parfois que $U \times \{t\}$ est une plaque du feuilletage appartenant à la carte Ω ;

3. Les composantes connexes de la variété \mathcal{F} sont appelées les feuilles du feuilletage.

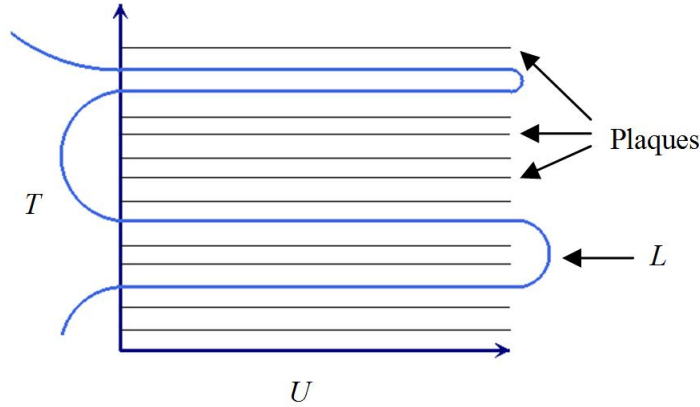


FIG. 1.1 – Forme locale d'un feuilletage

Propriété 1.1.1 Les feuilles sont des variétés de dimension p , et pour chaque $x \in M$, il existe une unique feuille passant par x que nous noterons L_x .

Rappelons que les feuilles ne sont pas forcément des sous variétés de la variété ambiante. Nous allons maintenant donner une autre définition d'un feuilletage.

Définition 1.1.3 La donnée d'un feuilletage \mathcal{F} de dimension p sur une variété M correspond à la donnée d'une famille disjointe $\{L_\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$ de variétés connexes de dimension p recouvrant M et d'un atlas $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \phi_i)\}$ de la variété M tel que pour tout i et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les composantes connexes de l'ensemble $L_\lambda \cap \Omega_i$ sont données par des équations de la forme $t = \text{constante}$.

Nous dirons alors que (M, \mathcal{F}) est un feuilletage de dimension p de la variété M .

Cette définition équivalente revient à voir un feuilletage comme la donnée d'un recouvrement de la variété par des sous ensembles disjoints qui sont des variétés de même dimension.

Un feuilletage \mathcal{F} induit un sous fibré $T\mathcal{F}$ du fibré tangent TM appelé fibré tangent du feuilletage. Il est constitué de tous les vecteurs tangents aux feuilles. Introduisons maintenant la notion de bon recouvrement.

Définition 1.1.4 Une carte feuilletée $\phi : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ est dite régulière si elle admet une extension à une carte feuilletée $\bar{\phi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$.

Définition 1.1.5 Un recouvrement d'une variété M par des cartes feuilletantes Ω_i est dit bon si :

1. Toute carte (Ω_i, ϕ_i) est une carte régulière ;

2. Si $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} \neq \emptyset$ alors $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et l'ensemble $\Omega_i \cap \Omega_j$ est connexe. Le même résultat est vrai pour les voisinages feuilletés associés $\widetilde{\Omega_i}$;
3. Chaque plaque de $\widetilde{\Omega_i}$ rencontre au plus une plaque de $\widetilde{\Omega_j}$. Une plaque de Ω_i rencontre une plaque de Ω_j si et seulement si l'intersection des plaques correspondantes de $\widetilde{\Omega_i}$ et $\widetilde{\Omega_j}$ est non vide.

De bons recouvrements existent toujours. Dans toute la suite, lorsque nous parlerons de recouvrement par des cartes feuilletantes, nous considérerons un bon recouvrement.

1.1.2 Exemples de feuilletages

Avant de nous intéresser à la notion de mesure transverse, nous allons donner quelques exemples simples de feuilletages. Commençons par donner un premier exemple de feuilletage trivial.

Exemples 1.1.1 $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^q)$ est un feuilletage de dimension q de \mathbb{R}^{p+q} .

Si l'on choisit $p = 1$ et $q = 2$, nous obtenons $p + q = 3$ et l'exemple précédent revient à voir l'espace usuel feuilleté par des plans. Donnons maintenant un exemple un peu plus conséquent.

Exemples 1.1.2 Le feuilletage de Kronecker

Le feuilletage que nous allons décrire est un feuilletage du tore. On considère le tore à un trou que l'on assimile au produit $[0; 1] \times [0; 1]$. Fixons θ un nombre réel et considérons la partition du tore en parties connexes suivante :

$$L_\alpha = \{y = \theta x + \alpha / x \in [0; 1]\} \text{ avec } \alpha \in [0; 1]$$

Cette famille nous définit un feuilletage du tore. Dans le cas où θ est rationnel, les feuilles du feuilletage sont des cercles et dans le cas où θ est irrationnel, chaque feuille est dense dans le tore.

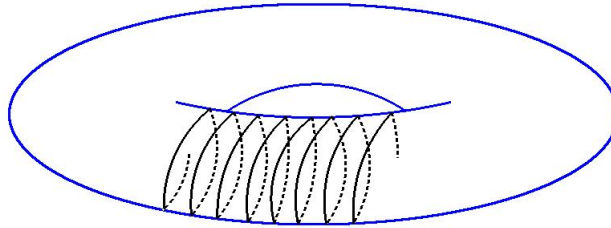


FIG. 1.2 – Feuilletage de Kronecker

Dans l'exemple précédent, les feuilles sont des variétés de dimension 1. Sans définir précisément la structure des feuilles, nous allons donner un exemple de feuilletage du tore plein par des feuilles de dimension 2.

Exemples 1.1.3 *Le feuilletage de Reeb*

Considérons de nouveau le tore à un trou. Nous choisissons cette fois de le voir comme le produit $\mathbb{R} \times [0; 1]$. Considérons alors la famille de paraboles suivantes :

$$P_\alpha = \{(x; y) / x + \alpha = y^2\}$$

Effectuons alors une rotation de cet ensemble autour de l'axe des abscisses. Nous obtenons une famille de paraboloides qui forment une partition de $\mathbb{R} \times D^1$. Envoyons alors \mathbb{R} sur $[0; 1]$ et faisons l'identification (classique) pour retrouver le tore usuel.

Nous obtenons ainsi un feuilletage du tore plein dont les feuilles sont des paraboloides qui s'imbriquent les unes dans les autres. Remarquons d'ailleurs que le tore creux est aussi une feuille du feuilletage.

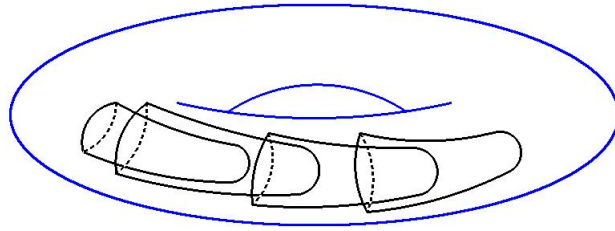


FIG. 1.3 – Feuilletage de Reeb

1.1.3 Groupoïde d'holonomie

Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée. Le groupoïde d'holonomie \mathcal{G} de \mathcal{F} est défini comme la catégorie suivante :

- les objets de \mathcal{G} sont les points de M ;
- les morphismes $\gamma : x \rightarrow y$ sont les classes d'holonomie des chemins partant de x , arrivant en y et qui sont contenus dans la feuille L_x passant par x .

Par abus de notation, nous noterons encore \mathcal{G} l'ensemble des morphismes du groupoïde.

Le groupoïde \mathcal{G} a une structure de variété lisse de dimension $2n - p$. Il y a deux applications canoniques $s, r : \mathcal{G} \rightarrow M$ qui à tout élément γ de \mathcal{G} associe la source $s(\gamma)$ et le but $r(\gamma)$ des chemins γ .

L'image $\mathcal{R} \subset M \times M$ de (s, r) est le graphe de la relation d'équivalence induite par le feuilletage \mathcal{F} , c'est à dire l'ensemble des couples de points $(x, y) \in M \times M$ tels que x et y sont sur la même feuille L .

Notations 1.1.1

- $\mathcal{G}_x = s^{-1}(x)$;
- $\mathcal{G}^y = r^{-1}(y)$;
- $\mathcal{G}_x^y = \mathcal{G}_x \cap \mathcal{G}^y$.

L'ensemble \mathcal{G}_x^x peut être identifié avec le groupe d'holonomie au point x (comme sous groupe de $\Pi_1(L_x, x)$). L'application $\mathcal{G}_x \rightarrow L_x$ est le revêtement d'holonomie de L_x de groupe \mathcal{G}_x^x .

1.1.4 Mesure transverse

La notion de mesure transverse découle directement de la notion de transversale du feuilletage. Commençons donc par définir précisément cette notion de transversale.

Définitions 1.1.1

- Une transversale lisse est une variété compacte T de dimension $n - p$, éventuellement à bords, telle qu'il existe un plongement $i : T \rightarrow M$ dont l'image est partout transverse aux feuilles du feuilletage, c'est-à-dire que pour tout $t \in T$, on a :

$$T_{i(t)}i(T) \oplus T_{i(t)}\mathcal{F} = T_{i(t)}M ;$$

Nous identifierons une transversale et son image.

- Une transversale est dite complète si elle rencontre toute feuille du feuilletage ;
- Une transversale borélienne du feuilletage \mathcal{F} est un sous ensemble de Borel de M qui coupe chaque feuille en au plus un ensemble dénombrable de points.

Le point de départ de la théorie non commutative de la mesure est de réinterpréter une transversale borélienne comme une fonction mesurable sur l'espace des feuilles M/\mathcal{F} à valeurs dans $\mathbb{Z}^+ \cup \infty$ et sa mesure transverse comme l'intégrale de cette fonction. Donnons maintenant la définition précise d'une mesure transverse.

Définitions 1.1.2

- Une mesure transverse Λ est une mesure de Radon additive définie sur l'ensemble de toutes les transversales du feuilletage ;
- Une mesure transverse Λ est dite invariante par holonomie si pour tout couple de transversales B_1, B_2 et pour toute application de Borel bijective $\phi : B_1 \rightarrow B_2$ vérifiant $\phi(x) \in L_x$ pour tout x dans B_1 , on a :

$$\Lambda(B_1) = \Lambda(B_2) .$$

Dans toute la suite, nous munissons la variété feuilletée d'une mesure transverse invariante par holonomie. Nous appellerons également Λ la mesure sur le groupoïde d'holonomie \mathcal{G} associé à Λ et à une section strictement positive en tout point des densités d'ordre

1 sur l'espace des feuilles du feuilletage (pour l'existence d'une telle densité, il suffit de choisir une métrique Riemannienne sur M et de considérer la forme volume associée à la restriction de la métrique à chaque feuille).

1.2 Cohomologie L^2 d'un feuilletage mesuré

Définissons maintenant la cohomologie L^2 d'un feuilletage mesuré.

1.2.1 Champ mesurable de carré intégrable

Donnons en premier lieu la définition d'un champ mesurable d'espaces de Hilbert. Pour plus détails, on renvoie à [68].

Définition 1.2.1 *Un fibré de Hilbert mesurable H sur un espace mesuré X est la donnée d'une famille d'espaces de Hilbert séparable H_x pour tout $x \in X$ et d'un ensemble S de sections*

$$\sigma : X \rightarrow \bigcup H_x \text{ avec } \sigma(x) \in H_x$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si $\sigma \in S$ la fonction

$$x \in X \mapsto \|\sigma(x)\|$$

est mesurable ;

2. S est complet dans le sens où si β est une section telle que :

$$x \in X \mapsto \langle \beta(x) | \sigma(x) \rangle \in \mathbb{C}$$

est mesurable pour tout $\sigma \in S$ alors $\beta \in S$;

3. Il existe une suite $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ d'éléments de S telle que pour tout x dans X , une base de H_x est donnée par un sous ensemble de $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$.

Un fibré de Hilbert sur le groupoïde \mathcal{G} désignera un fibré de Hilbert H sur M muni d'une représentation mesurable de \mathcal{G} dans H . Cette dernière est par définition un foncteur u de \mathcal{G} dans la catégorie des espaces de Hilbert, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes :

1. $u(x) = H_x$;
2. Pour tout élément $\gamma : x \rightarrow y$ de \mathcal{G} , l'application $u(\gamma) : H_x \rightarrow H_y$ est une isométrie ;
3. $u(\gamma_1^{-1}\gamma_2) = u(\gamma_1^{-1})u(\gamma_2)$ partout où $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ est défini ;
4. Si $\sigma, \beta \in S$ sont deux sections mesurables, la fonction $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto \langle \sigma(x) | u(\gamma)\beta(y) \rangle$ est mesurable.

Dans toute la suite, les fibrés de Hilbert seront sur \mathcal{G} et nous omettrons donc de le préciser. D'autre part, nous n'indiquerons pas le foncteur et nous noterons le fibré simplement par H au lieu de (H, u) . On parlera aussi de champs d'espaces mesurables pour désigner de tels fibrés.

Définition 1.2.2 *Un homomorphisme de fibré de Hilbert mesurable $T : H \rightarrow H'$ est une transformation naturelle, bornée et mesurable de foncteurs $u \rightarrow u'$. Plus précisément, cela signifie que pour presque tout x , il existe un opérateur borné $T_x : H_x \rightarrow H'_x$ tel que :*

– le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & H_x & \xrightarrow{T_x} & H'_x & \\ u(\gamma) & \downarrow & & \downarrow & u'(\gamma) \\ & H_y & \xrightarrow{T_y} & H'_y & \end{array}$$

– $\sup \|T_x\| < \infty$.

On note $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(H, H')$ l'ensemble des ces homomorphismes. Nous pouvons maintenant aborder la notion de carré intégrable.

Définition 1.2.3 *Un fibré de Hilbert sur \mathcal{G} est dit de carré intégrable s'il est isomorphe à une somme directe de copies de $L^2(\nu)$ pour un certain ν qui est une mesure tangentielle (voir [14] pour plus de détails).*

Cette notion de carré intégrable, nous permet de définir une notion de trace locale. Soit H un fibré de Hilbert de carré intégrable et T un opérateur positif de $\text{End}_{\mathcal{G}}$. On peut construire une mesure tangentielle $\text{LocTr}(T)$ en posant :

$$\text{LocTr}(T)(A) = \text{Tr}(\chi_A \circ T \circ \chi_A)$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset L$.

Rappelons qu'une algèbre de Von Neumann \mathcal{A} est une algèbre d'opérateurs de Hilbert bornés tels que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ et tel que le double commutant \mathcal{A}'' soit égal à \mathcal{A} . Une trace sur une algèbre de Von Neumann \mathcal{A} est une application Tr de l'ensemble des éléments positifs de \mathcal{A} dans $[0; +\infty]$ telle que :

1. $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$;
2. $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$ pour tout $\alpha > 0$;
3. $\text{Tr}(AA^*) = \text{Tr}(A^*A)$ dès que $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^*)$ sont finies ;
4. $\text{Tr}(AA^*) = 0$ si et seulement si $A = 0$;
5. $\text{Tr}(\sup_i (X_i)) = \sup_i (\text{Tr}(X_i))$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.1 *Si H est de carré intégrable sur \mathcal{G} alors $\text{End}_{\mathcal{G}}(H)$ est une algèbre de Von Neumann. D'autre part, l'intégration de $\text{LocTr}(T)$ par rapport à la mesure transverse Λ définit une trace $\text{Tr}_{\Lambda} : \text{End}_{\mathcal{G}}(H) \rightarrow [0; \infty]$.*

On peut alors définir la dimension de Murray-Von Neumann d'une représentation régulière gauche H (cf. [14]) comme $\dim_\Lambda(H) = \text{Tr}_\Lambda(1_H)$. Cela généralise la notion de dimension dans le cas des champs de carré intégrable.

Nous dirons enfin que deux fibrés de Hilbert H, H' sur \mathcal{G} sont isomorphes s'il existe $T \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(H, H')$ tel que T_x soit un isomorphisme d'espaces de Hilbert pour presque tout $x \in M$. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 1.2.2 *Si H et H' sont isomorphes en tant que fibrés de Hilbert sur \mathcal{G} alors :*

$$\dim_\Lambda(H) = \dim_\Lambda(H')$$

Lorsque $\mathcal{G}_x^x = \{x\}$ pour Λ -presque tout x , un champ mesurable est simplement la donnée pour toute feuille L d'un espace de Hilbert H_L tel que pour tout ouvert trivialisant $\Omega = U \times T$, l'application $x \mapsto H_{L_x}$ est un champ mesurable sur Ω . Dans toute la suite, on identifiera deux champs qui sont égaux sauf sur un ensemble Λ -négligeable de feuilles.

1.2.2 Nombres de Betti

Les nombres de Betti L^2 d'un feuilletage mesuré sont des invariants numériques associés à la cohomologie L^2 des feuilles. Considérons alors V une variété Riemannienne complète et posons $\mathcal{H}^q(V)$ l'espace des q -formes harmoniques sur V . L'ensemble $\mathcal{H}^q(V)$ est un sous espace fermé des formes différentielles L^2 que nous noterons $\Lambda^q(V)$, c'est donc en particulier un espace de Hilbert.

L'opérateur de différentiation d permet de définir par densité des opérateurs non bornés de $\Lambda^q(V)$ dans $\Lambda^{q+1}(V)$. Nous supposons que ces opérateurs sont définis sur le domaine $\{\omega \in L^2/d\omega \in L^2\}$. Le q -ième groupe de cohomologie L^2 (ou de De Rham) sur V est défini par :

$$H_{dR}^q(V) = \text{Ker } d_q / \overline{\text{Im } d_{q-1} \cap \text{dom } d_q}$$

Rappelons le théorème de Hodge.

Théorème 1.2.3 *Sur une variété Riemannienne complète V :*

$$\mathcal{H}^q(V) \cong H_{dR}^q(V)$$

Nous allons maintenant étendre ce résultat au cas des feuilletages. Supposons avoir fixé une métrique Riemannienne sur la variété M . Chaque feuille L est une variété complète par rapport à la métrique induite. En particulier, c'est aussi le cas du recouvrement d'holonomie \tilde{L} de chaque feuille. On définit un fibré mesurable d'Hilbert \mathcal{H}^q sur le groupoïde \mathcal{G} en posant :

$$(\mathcal{H}^q)_x = \mathcal{H}^q(\tilde{L}_x) \text{ pour tout } x \in M$$

Remarque 1.2.1 *La définition précédente dépend de la métrique a priori. Mais la variété M étant compacte, toutes les métriques Riemanniennes sont quasi-isométriques, ce qui reste le cas pour les métriques induites et cette quasi-isométrie permet de démontrer que les espaces de formes harmoniques associés sont isomorphes.*

De manière analogue, on peut définir un fibré d'espaces de Hilbert à partir des groupes de cohomologie de De Rham en posant :

$$(H_{dR}^q)_x = H_{dR}^q(\tilde{L}_x) \text{ pour tout } x \in M$$

Les isomorphismes donnés par le théorème précédent sont canoniques et commutent à l'action de \mathcal{G} . Cela nous permet de définir une structure mesurable sur le fibré (H_{dR}^q) . On en déduit alors l'isomorphisme en tant que fibrés sur \mathcal{G} de (H_{dR}^q) et de (\mathcal{H}^q) .

Le fibré (\mathcal{H}^q) est de carré intégrable, c'est donc aussi le cas du fibré (H_{dR}^q) . Nous pouvons donc définir le q -ième nombre de Betti L^2 de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F}, \Lambda)$ en posant :

$$L^2 b_q = \dim_{\Lambda}(\mathcal{H}^q)$$

Remarque 1.2.2 *La notion de nombre de Betti d'un feuilletage a été introduite par A. Connes. On peut aussi définir la notion de nombre de Betti réduit mais dans le cas où l'ensemble des feuilles, dont l'holonomie est non-triviale, est de mesure nulle, ces deux notions coïncident. Par la suite, nous nous restreindrons à un feuilletage de ce type, c'est pourquoi nous ne donnons qu'une seule des deux notions existantes.*

Chapitre 2

Fonction de Morse feuilletée et variété critique associée

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion de fonction de Morse feuilletée introduite par *A. Connes* et *T. Fack* dans [17], [18]. Ces fonctions sont génériques et la structure locale de leurs variétés critiques est bien étudiée. En particulier, on dispose de formes normales au voisinage des points critiques longitudinaux

Nous introduisons ensuite le matériel nécessaire pour définir le complexe d'orientation associé à une fonction de Morse feuilletée. En particulier, on étudie le champ de gradient d'une telle fonction et quelques propriétés élémentaires des trajectoires de ce champ.

2.1 Fonction de Morse feuilletée généralisée

Soit $(M, \mathcal{F}, \Lambda)$ un feuilletage mesuré de dimension p sur une variété Riemannienne de dimension n .

Il est naturel d'appeler fonction de Morse sur (M, \mathcal{F}) une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur M telle que sa restriction $f|_L$ à chaque feuille L soit de Morse. Cette notion est toutefois beaucoup trop restrictive (Cf. lemme 2.1.1) et doit être remplacée par une notion plus faible qui consiste à demander que $f|_L$ soit de Morse pour presque toute feuille L .

Cette notion autorise malheureusement tout un zoo de singularités longitudinales qu'il est difficile de contrôler génériquement. Fort heureusement, un résultat de *K. Igusa* permet, sans perdre la généricité, de réduire à deux les types de singularités considérées : de Morse et de naissance-mort (singularité cubique).

2.1.1 Singularités feuilletés

Soit f une fonction lisse à valeurs réelles sur M . Rappelons tout d'abord la notion de différentielle feuilletée (ou longitudinale).

Définition 2.1.1 *La différentielle $d_{\mathcal{F}}f$ de f dans la direction des feuilles est définie dans toute carte feuilletante $U \times T$ comme la différentielle par rapport aux premières coordonnées :*

$$d_{\mathcal{F}}f(u, t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial u^i}(u, t) du^i$$

On vérifie aisément que $d_{\mathcal{F}}f$ est intrinséquement définie.

Définition 2.1.2 *Un point a tel que $d_{\mathcal{F}}f(a) = 0$ sera appelé une singularité tangentielle (ou simplement une singularité) de f .*

Pour une telle singularité, le Hessien longitudinal $d_{\mathcal{F}}^2f$ a un sens et s'écrit dans les coordonnées locales (u, t) :

$$d_{\mathcal{F}}^2f(u, t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u, t) \right)_{i,j}$$

On appellera indice de la singularité le nombre de signes « $-$ » dans la signature de la forme quadratique $d_{\mathcal{F}}^2f(a)$. Nous distinguons essentiellement deux types de singularités.

Définition 2.1.3 *Une singularité tangentielle $a \in M$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est :*
 – *de Morse si $d_{\mathcal{F}}^2f(a)$ n'est pas singulière (i.e. : son déterminant est non nul) ;*

– de naissance-mort (birth-death) si la restriction de l'application :

$$x \mapsto (d_{\mathcal{F}}\phi(x), \det(d_F^2\phi(x)))$$

à la feuille L_a passant par a est de rang p en a .

Nous dirons qu'un point de naissance-mort est d'indice i si ce point appartient à l'adhérence des points de Morse d'indice i et des points de Morse d'indice $i+1$. Pour faire référence aux ensembles critiques de la fonction, nous utilisons les notations suivantes.

Notations 2.1.1

$$\begin{aligned}\Sigma(f) &= \{x \in M / d_L\phi(x) = 0\} \\ C(f) &= \{x \in \Sigma / x \text{ est une singularité tangentielle de Morse de } f\} \\ \Gamma(f) &= \{x \in \Sigma / x \text{ est une singularité tangentielle de type naissance-mort de } f\}\end{aligned}$$

Pour $0 \leq i \leq p$, on note aussi :

$$\begin{aligned}C^i(f) &= \{x \in C / x \text{ est une singularité tangentielle de Morse d'indice } i \text{ de } f\} \\ C_{i,i+1}(f) &= \left\{ x \in \Gamma / \begin{array}{l} x \text{ est une singularité tangentielle de type naissance-mort} \\ \text{d'indice } i \text{ de } f \end{array} \right\}\end{aligned}$$

On dira parfois que l'ensemble C^i est la transversale critique d'indice i et que l'ensemble $C_{i,i+1}$ est la caustique d'indice i . Plus généralement, la caustique désignera l'ensemble Γ .

2.1.2 Généricité des fonctions de Morse presque partout

Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, le fait d'être de Morse en restriction à toute feuille est extrêmement restrictif. En effet, on a :

Lemme 2.1.1 *Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage lisse sur une variété fermée. Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ avec seulement des singularités tangentielles de Morse. Alors l'ensemble $\Sigma(f) = C(f)$ est une sous-variété fermée de dimension $n - p$ transverse au feuilletage.*

Preuve (Cf. [17]) : Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que pour toute feuille L , la restriction $f|_L$ n'a pas de point critique dégénéré. Considérons l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned}\Phi : M &\rightarrow T^*\mathcal{F} \\ x &\rightarrow (x, d_{\mathcal{F}}f(x))\end{aligned}$$

La différentielle de Φ dans une carte locale $\Omega = U \times T$ est donnée par :

$$d\Phi_{(u,t)} = \left(1, \frac{\partial}{\partial u} d_{\mathcal{F}}f(u, t) + \frac{\partial}{\partial t} d_{\mathcal{F}}f(u, t) \right)$$

en notant $d_{\mathcal{F}}f(u, t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial u^i}(u, t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, t) = f'_u$. On en déduit que :

$$d\Phi_{(u,t)}(X_u, X_t) = ((X_u, X_t), f''_{u,u}(u, t)X_u + f''_{u,t}(u, t)X_t)$$

De plus, pour $(u, t) \in C(f)$, on a $\det f''_{u,u}(u, t) \neq 0$.

D'une part, cela implique que $C(f)$ est sous variété fermée de M de dimension $\dim C(f) = \text{codim}(\mathcal{F})$. D'autre part, nous obtenons aussi que $C(f)$ est transverse au feuilletage \mathcal{F} . En effet, soit $X = (X_u, X_t)$ un vecteur non nul tangent à $C(f)$ au point (u, t) alors nous avons :

$$f''_{u,u}(u, t)X_u + f''_{u,t}(u, t)X_t = 0$$

Cela implique que la composante transverse X_t de X est non nulle, et d'après la dimension de $C(f)$, cela implique que cet espace est transverse au feuilletage. ■

Comme de nombreux feuilletages intéressants ne possèdent pas de sous variétés transverses fermées, la notion de fonction de Morse feuilletées doit admettre l'existence de « mauvaises feuilles » L telles que $f|_L$ ne soit pas de Morse. Il est cependant possible d'imposer que ces « mauvaises feuilles » forment génériquement un ensemble Λ -négligeable.

Définition 2.1.4 *Soit $(M, \mathcal{F}, \Lambda)$ un feuilletage mesuré sur une variété M fermée. Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ sera dite de Morse presque partout (par rapport à la mesure Λ) si l'ensemble $\{x \in M / f|_{L_x} \text{ n'a que des singularités de Morse}\}$ est Λ -conégligeable.*

Démontrons maintenant que la notion de fonction de Morse presque partout est générique.

Soit N une variété lisse. On rappelle que la topologie \mathcal{C}^∞ faible est la topologie dont une base de voisinage d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$ est donnée par les ensembles $N_r(f; (\Omega, \alpha), K, \varepsilon)$ définis par :

$$\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}) / \forall x \in \alpha(K) \text{ et } |k| \leq r, |D^k(\varphi \circ \alpha^{-1})(x) - D^k(f \circ \alpha^{-1})(x)| < \varepsilon\}$$

où (Ω, α) est une carte, K un compact de Ω et $\varepsilon > 0$. Cette topologie peut être munie d'une métrique complète et coïncide avec la topologie \mathcal{C}^∞ usuelle si N est compact.

Théorème 2.1.1 (Cf. [17]) *Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage lisse, sur une variété fermée, muni d'une mesure transverse Λ -invariante par holonomie. Alors l'ensemble des fonctions de Morse presque partout est un G_δ -dense pour la topologie \mathcal{C}^∞ .*

Pour chaque paire $(\Omega = U \times T, K = P \times S)$, où $\Omega = U \times T$ est une carte feuilletée et $K = P \times S$ est un compact de $\Omega = U \times T$, on définit $Z_k(\Omega)$ comme l'ensemble :

$$\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) / u \in P \rightarrow \varphi_t(u) = \varphi(u, t) \in \mathbb{R} \\ \text{est une fonction de Morse pour } \Lambda - \text{presque tout } t \in S\}$$

La preuve de ce théorème est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1.2 *Soit $(\Omega = U \times T, K = P \times S)$ comme précédemment. Alors $Z_k(\Omega)$ est un G_δ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.*

Preuve du Lemme 2.1.2 : On rappelle qu'un G_δ est un ensemble pouvant s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $(u, t) \in U \times T$. Posons :

$$\Phi(u, t) = \left| \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}(u, t) \right) \right|^2 + \sum_{i=1}^p \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u, t) \right|^2$$

$$\text{et } \Phi(t) = \inf_{u \in P} \Phi(u, t)$$

Il est clair que si $(u, t) \in U \times T$ est une singularité de $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ alors :

$$\sum_{i=1}^p \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u, t) \right|^2 = 0$$

Ainsi cette singularité n'est pas de Morse si et seulement si :

$$\left| \det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}(u, t) \right) \right|^2 = 0 \Leftrightarrow \Phi(u, t) = 0$$

On en déduit, puisque $\Phi(u, t) \geq 0$, que :

$$Z_k(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) / \Lambda(\{t \in S / \Phi(t) = 0\}) = 0\}$$

D'où finalement :

$$Z_k(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) / \Lambda(\{t \in S / \Phi(t) > 0\}) \geq \Lambda(S)\}$$

Nous pouvons donc décomposer $Z_k(\Omega)$ sous la forme :

$$Z_k(\Omega) = \bigcap_n \left(\bigcup_m Z_k(\Omega, n, m) \right)$$

avec $Z_k(\Omega, n, m) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) / \Lambda(\{t \in S / \Phi(t) > \frac{1}{m}\}) \geq \Lambda(S) - \frac{1}{n}\}$ Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que l'ensemble $Z_k(\Omega, n) = \bigcup_m Z_k(\Omega, n, m)$ est ouvert.

Soit alors $\Phi_0 \in Z_k(\Omega, n)$, il existe donc un entier $m \geq 1$ tel que :

$$\Lambda \left(\left\{ t \in S / \Phi_0(t) > \frac{1}{m} \right\} \right) \geq \Lambda(S) - \frac{1}{n}$$

Par continuité de l'application $\varphi \mapsto \Phi$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ (pour les topologies faibles), il existe un voisinage V de Φ_0 dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall t \in S \quad \Phi \in V \Rightarrow |\Phi_0(t) - \Phi(t)| \leq \|\Phi_0 - \Phi\|_{K,\infty} < \frac{1}{2m}$$

On en déduit que :

$$\left\{ t \in S / \Phi(t) > \frac{1}{2m} \right\} \supset \left\{ t \in S / \Phi_0(t) > \frac{1}{m} \right\}$$

D'où finalement :

$$\Phi \in V \Rightarrow \Lambda \left(\left\{ t \in S / \Phi(t) > \frac{1}{2m} \right\} \right) > \Lambda(S) - \frac{1}{n}$$

Ainsi V est contenu dans $Z_k(\Omega, n, 2m)$ donc dans $Z_k(\Omega, n)$. ■

Lemme 2.1.3 *Soit $\Omega = U \times T$ une carte feuilletée. Alors l'ensemble*

$$Z(\Omega) = \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) / u \in U \rightarrow \varphi_t(u) = \varphi(u, t) \in \mathbb{R} \\ \text{est une fonction de Morse pour } \Lambda - \text{presque tout } t \in S \}$$

est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie faible.

Preuve du Lemme 2.1.3 : On fixe un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^p . Pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $(a_1, \dots, a_p) \in V$, on considère la perturbation linéaire Φ^a de Φ définie par :

$$\Phi^a(u, t) = \Phi(u, t) + \sum_{i=1}^p a_i u^i$$

On vérifie ensuite que pour tout $t \in T$, l'application $\Phi_t^a : u \mapsto \Phi^a(u, t)$ est de Morse sur U pour presque tout $a \in V$ (par rapport à la mesure de Lebesgue induite). ■

Preuve du Théorème 2.1.1 : Soit $(\Omega_i, K_i)_{1 \leq i \leq k}$ un nombre fini de cartes feuilletées $\Omega_i = U_i \times T_i$ et un nombre fini d'ensembles compacts $K_i = P_i \times S_i \subset \Omega_i = U_i \times T_i$ tels que les K_i recouvrent M . On définit l'application de restriction suivante :

$$\begin{aligned} \rho_i : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega_i, \mathbb{R}) \\ \phi &\mapsto \phi|_{\Omega_i} \end{aligned}$$

Cette application étant continue, on en déduit d'après le lemme 2.1.2 que $\rho_i^{-1}(Z_{K_i}(\Omega_i))$ est un G_δ . Or $\mathcal{P}(M, \mathcal{F}, \Lambda) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \rho_i^{-1}(Z_{K_i}(\Omega_i))$ donc $\mathcal{P}(M, F, \Lambda)$ est un G_δ . D'après le théorème de Baire, pour prouver la densité de cet ensemble il suffit de montrer que chaque ensemble $\rho_i^{-1}(Z_{K_i}(\Omega_i))$ est dense.

En d'autres termes, il faut démontrer que $\rho^{-1}(Z_K(\Omega))$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ pour une paire $(\Omega = U \times T, K = P \times S)$ où Ω est une carte feuilletante, $K = P \times S$ un sous-ensemble compact de $U \times T$ et $\rho : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ l'application de restriction. Pour cela, considérons une fonction lisse $\alpha : M \rightarrow [0; 1]$ à support compact dans Ω et telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage de K .

Fixons $\Phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et notons \mathcal{V} un voisinage de cette fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie faible. Pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on définit $F(\Phi) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} F(\Phi)(x) &= \Phi_0(x) + \alpha(x)(\Phi(x) - \Phi_0(x)) \text{ si } x \in \Omega \\ &= \Phi_0(x) \text{ si } x \notin \Omega \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement, grâce au lemme 2.1.3, qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{V}_1 \cap Z_k(\Omega)$ où \mathcal{V}_1 est un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie faible telle que $F(\Phi) \in \mathcal{V} \cap \rho^{-1}(Z_k(\Omega))$, ce qui suffit pour prouver que $\rho^{-1}(Z_k(\Omega))$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. ■

Ainsi, le fait d'être une fonction de Morse presque partout est une condition générique.

2.1.3 Généricité des fonctions de Morse feuilletées généralisées

Même si une notion raisonnable de fonction de Morse sur un feuilletage peut être définie en n'autorisant des singularités dégénérées que sur un ensemble Λ -négligeable de feuilles, la présence de ces singularités complique sérieusement l'étude des variétés critiques. Il est donc naturel de chercher à n'autoriser qu'un nombre réduit de type de singularités, tout en conservant la généricité. Ceci est possible grâce à un résultat de *K. Igusa* que nous allons maintenant rappeler.

Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer que la mesure transverse Λ est absolument continue par rapport à la classe de Lebesgue et que Λ -presque toute feuille est sans holonomie. Le résultat général s'obtient ensuite en remplaçant chaque feuille par son recouvrement d'holonomie (Cf. [15]).

Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage lisse sur une variété compacte.

Toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ peut être vue dans une carte feuilletante $\Omega = U \times T \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ comme une famille lisse à $(n-p)$ paramètres de fonctions lisses $\phi_t : u \in \mathbb{R}^p \mapsto \phi_t(u) = \phi(u, t) \in \mathbb{R}$ et ainsi comme un élément de l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{n-p}, \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$ pour $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un recouvrement fini de cartes feuilletantes de M , nous pouvons ainsi définir la topologie \mathcal{C}^k sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Théorème 2.1.2 [52] [30] *Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage lisse de dimension p sur une variété compacte M .*

1. Toute fonction $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ peut être \mathcal{C}^0 -approchée par une fonction lisse $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ dont la restriction à chaque feuille n'a que des singularités de Morse ou de naissance-mort ;
2. Si $\text{codim}(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathcal{F})$, toute fonction $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ peut être \mathcal{C}^1 -approchée par une fonction lisse $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ dont la restriction à chaque feuille n'a que des singularités de Morse ou de naissance-mort.

L'assertion (2) a été démontrée par *K. Igusa* [52] ; elle nécessite cependant une condition sur la dimension du feuilletage. Pour notre étude, la première approximation est suffisante. Celle-ci, déjà connue de *K. Igusa*, est une conséquence d'un théorème de *Y. M. Eliashberg* et *N. M. Mishachev* [30]. Le principe de la preuve donnée par ces auteurs est de déformer la variété critique C associée à la fonction ϕ_0 considérée et d'« intégrer » cette variété critique pour obtenir une fonction ϕ qui approche ϕ_0 et qui n'a plus que des singularités de Morse ou de naissance-mort feuille à feuille.

Remarquons que *Y. M. Eliashberg* a aussi prouvé que la \mathcal{C}^0 -approximation ϕ d'une fonction feuilletée générique ϕ_0 peut être faite de sorte que $\Lambda(C^i(\phi))$ soit arbitrairement proche de $\Lambda(C^i(\phi_0))$. Cette remarque nous permet de remplacer la notion de fonction de Morse presque partout par celle de fonction de Morse généralisée définie comme ci-dessous :

Définition 2.1.5 Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage lisse de dimension p sur une variété compacte M . Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est dite de Morse feuilletée généralisée si c'est une fonction de Morse feuilletée presque partout et si, en restriction à chaque feuille, elle n'a que des singularités de Morse ou de naissance-mort.

Dans toute la suite, nous noterons f une fonction de Morse feuilletée généralisée. Nous parlerons parfois simplement de fonction de Morse feuilletée.

2.1.4 Propriétés des ensembles critiques

Nous donnons ici les propriétés élémentaires des ensembles critiques associés à une fonction f de Morse feuilletée généralisée. Dorénavant, nous omettrons d'indiquer la fonction pour alléger les notations.

Propriété 2.1.1 Σ est une sous-variété compacte de dimension q de M .

La variété critique Σ est transverse au feuilletage sauf sur un ensemble de points Λ -négligeable. Les ensembles C_i sont précisément les parties de Σ deux à deux disjointes sur lesquelles la condition de transversalité est vérifiée, leur complémentaire dans Σ étant justement la caustique Γ .

Propriété 2.1.2 *Chaque C_i est une sous-variété de M de dimension $n - p$ qui est transverse au feuilletage et ouverte dans Σ .*

Remarquons que C_i n'est pas fermée dans M en général ; les ensembles $C_{i,i+1}$ appartiennent à la fermeture des C_i .

Propriété 2.1.3 *Chaque ensemble $C_{i,i+1}$ est une sous-variété fermée de Σ de dimension $n - p - 1$ qui est Λ -négligeable et qui appartient à la fois à la fermeture de C_i et à celle de C_{i+1} .*

La notation $C_{i,i+1}$ permet d'insister sur le fait que cet ensemble connecte les points de Morse d'indice i et ceux d'indice $i + 1$. Les ensembles $C_{i,i+1}$ sont deux à deux disjoints.

Notons enfin que l'on a :

Propriété 2.1.4 *Soit Ω une carte feuilletante fixée, l'ensemble des points critiques appartenant à Ω est fini plaque à plaque.*

Preuve : Soit $\Omega = U \times T$. Le résultat précédent découle de la compacité de \bar{U} . En effet, nous savons que l'ensemble des points critiques de la fonction est un ensemble discret feuille à feuille, la compacité de \bar{U} nous permet d'affirmer que chaque plaque $P_t = U \times \{t\}$ est un sous-ensemble relativement compact d'une feuille, d'où le résultat. ■

Remarque 2.1.1 *Le résultat précédent ne signifie pas qu'il y a un nombre fini de points critiques dans la carte, ni d'ailleurs que le nombre de points critiques appartenant à une feuille fixée et à Ω est fini (cas d'une feuille dense dans Ω).*

2.2 Formes normales de la fonction et de la métrique

Le but de cette section est de définir un voisinage tubulaire de la variété critique dans lequel nous aurons des formes normales pour la fonction ainsi que pour la métrique. *K. Igusa* a déjà démontré l'existence de tels voisinages tubulaires. Nous rappelons ci-dessous les résultats dont nous aurons besoin ainsi que les idées des démonstrations. Ces résultats nous serviront à analyser les trajectoires du champ de gradient feuilleté, d'où le rôle de la distance d'Agmon dans notre présentation.

Nous distinguerons le cas où les points critiques sont dans un voisinage de la caustique de celui où ils sont suffisamment loin de la caustique. A partir de l'analyse de ces deux cas, nous construisons un voisinage de la variété critique ayant un certain nombre de propriétés. Nous donnons enfin une description de ces voisinages à l'aide de la distance d'Agmon.

2.2.1 Etude en dehors d'un voisinage de la caustique

Rappelons d'abord le lemme de Morse paramétrique qui permet d'étudier la structure locale de la fonction au voisinage d'un point appartenant à $C^q(f)$.

Proposition 2.2.1 (*Lemme de Morse paramétrique*) Soit $f_t : U \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in D^{n-p}$ une famille continue de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ non singulières sur ∂U . Soit K un sous ensemble compact de l'ensemble $C^q(f)$ des points critiques de Morse d'indice q . Alors il existe deux fibrés vectoriels E_+^{p-q}, E_-^q sur K (il s'agit précisément des espaces propres fibrés du Hessien de f sur K) avec structure de groupe orthogonal $O(p-q), O(q)$, un voisinage V de la section nulle de K dans $E_+ \oplus E_-$ et un plongement lisse $\phi : V \rightarrow U \times D^{n-p}$ avec les propriétés suivantes :

1. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & K & \\
 0 - \text{section} \swarrow & & \searrow \text{inclusion} \\
 V & \xrightarrow{\phi} & U \times D^k \\
 \downarrow \pi & & p \downarrow \\
 K & \xrightarrow{\psi} & D^k
 \end{array}$$

où ψ est la restriction de la projection $U \times D^k \rightarrow D^k$ à K ;

2. Si $(x, y) \in V \subset E_+ \oplus E_-$ sont dans la fibre de $z \in K$ alors on a :

$$f(\phi(x, y)) = f(z) + \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Nous savons que chaque variété critique C^q est une sous-variété ouverte de Σ de dimension q transverse au feuilletage. Le lemme de Morse paramétrique nous donne l'existence, pour tout ensemble compact K de C^q , d'une paire (E_+^{p-i}, E_-^i) de fibrés vectoriels euclidiens sur K (correspondant aux espaces propres du Hessien feuilleté de f), d'un voisinage tubulaire feuilleté N de K (difféomorphe à un voisinage de la section nulle de K dans $E_+^{p-i} \oplus E_-^i$) tels que l'on ait pour tout $(u^+, u_-, t) \in \Omega = U \times D^{n-p} \subset E_+^{p-i} \oplus E_-^i$ appartenant à la fibre au dessus de $t \in K$:

$$f(u^+, u_-, t) = f(0, t) + \|u_+\|^2 - \|u_-\|^2$$

Localement, nous pouvons modifier légèrement la paramétrisation qui intervient pour obtenir :

$$f(u, t) = f(0, t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (u^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=q+1}^p (u^i)^2$$

2.2.2 Etude au voisinage de la caustique

Comme nous l'avons déjà précisé, la caustique Γ est une sous-variété compacte de Σ de dimension $n - p - 1$. *K. Igusa* a démontré (Cf. [50]) que, pour tout point critique x

de naissance-mort d'indice i , il existe un voisinage compact K de ce point dans Γ , un voisinage V de la zéro section de K dans l'espace total du fibré vectoriel $E_+^{p-i-1} \oplus E_-^i$ correspondant aux espaces propres positifs et négatifs du Hessien feuilleté de f , et un voisinage feuilleté ouvert Ω de x isomorphe à un produit $I_\delta \times V \times I_\varepsilon$ avec $I_\delta =]-\delta; \delta[$ et $I_\varepsilon =]-\varepsilon; \varepsilon[$ tels que :

1. $\{0\} \times K \times I_\varepsilon \subset I_\delta \times V \times I_\varepsilon$ est une transversale pour Ω ;
2. La plaque passant par $(0, t) \in K \times I_\varepsilon$ avec $t = (k, s)$ peut être identifiée à :

$$P_t = \{\omega = (u, \tilde{k}, s) \in \Omega \cong I_\delta \times V \times I_\varepsilon \mid \tilde{k} \text{ appartient à la fibre au dessus de } k\}$$

3. Pour tout $u = (u, \tilde{k}, s) \in \Omega \cong I_\delta \times V \times I_\varepsilon$ avec \tilde{k} appartenant à la fibre au dessus de $k \in K$, nous avons :

$$f(u, \tilde{k}, s) = f(0, k, s) + \frac{u_1^3}{3} + u_1 s - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{i+1} (u_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^p (u_j)^2$$

2.2.3 Voisinage tubulaire de la variété critique

Considérons tout d'abord un point critique x appartenant à la caustique. D'après le résultat vu en 2.2.2, il existe un voisinage feuilleté ouvert Ω_x isomorphe à un produit $I_{\delta_x} \times V_x \times I_{\varepsilon_x}$. La compacité de la variété critique Γ nous permet de recouvrir la caustique par un nombre fini de cartes feuilletantes Ω_{x_i} , d'où l'existence de réels δ et ε indépendants des points critiques. On pose alors :

$$N_{1,\delta,\varepsilon} = \bigcup_i I_\delta \times V_{x_i} \times I_\varepsilon$$

Remarquons qu'il s'agit d'un voisinage tubulaire feuilleté d'un certain voisinage de la caustique Γ_ε . En effet, pour toute feuille L , l'ensemble $N_{1,\delta,\varepsilon} \cap L$ est un voisinage tubulaire de la sous variété $\Gamma_\varepsilon \cap L$ de dimension 0.

L'ensemble $N_{1,\delta,\varepsilon}$ définit un voisinage tubulaire du voisinage Γ_ε de la caustique dans lequel la fonction a une forme normale dite de naissance-mort (Cf. 2.2.2).

Fixons un réel q compris entre 0 et p , et définissons C_ε^q comme l'ensemble $C^q \setminus \Gamma_\varepsilon$. Il s'agit d'un ensemble fermé de Σ donc d'un ensemble compact. De plus, il est contenu dans C^q . D'après la section 2.2.1, il existe un voisinage tubulaire feuilleté de C_ε^q dans lequel la fonction a une forme normale de Morse. On le note $N_{2,\varepsilon}^q$.

Notons $N_{2,\varepsilon}$ la réunion sur q des voisinages $N_{2,\varepsilon}^q$ obtenus. On définit ainsi un voisinage tubulaire feuilleté de la variété critique privé d'un voisinage de caustique dans lequel la fonction a localement une forme normale.

La réunion des deux voisinages tubulaires $N_{1,\delta,\varepsilon}$ et $N_{2,\varepsilon}$ donne un voisinage tubulaire feuilleté de toute la variété critique Σ . Nous le notons dans la suite $N_{\delta,\varepsilon}$. Dans ce voisinage

la fonction a localement une forme normale de naissance-mort ou de Morse selon que l'on se trouve près de la caustique ou non. Remarquons que le paramètre δ dépend du paramètre ε .

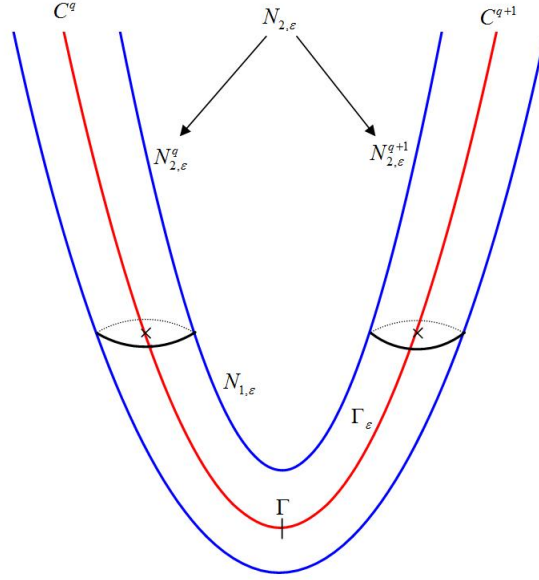


FIG. 2.1 – Premier voisinage tubulaire de la variété critique

Jusqu'à présent, nous n'avons pas évoqué la forme de la métrique. En fait, et cela nous sera utile, nous pouvons imposer à la métrique d'être plate dans le voisinage tubulaire $N_{2,\varepsilon}$ de C_ε .

En effet, prenons dans le voisinage $N_{2,\delta,\varepsilon}$ l'image réciproque de la métrique plate par la paramétrisation qui permet d'avoir la forme normale de la fonction. Nous aurons donc localement une forme normale pour la fonction et la métrique sera la métrique plate. Nous pouvons ensuite étendre cette métrique au reste de la variété grâce à l'hypothèse de compacité de la variété globale. Une telle métrique dépend de ε et nous la notons g_ε .

On notera que l'on n'impose pas à la métrique d'être plate dans $N_{1,\delta,\varepsilon}$. Même si, dans l'étude des modèles locaux, le recours à une métrique plate est utile, nous ne devons pas perdre de vue le fait que la métrique n'est pas plate au voisinage de la caustique.

A partir de maintenant et dans toute la suite, nous munissons la variété M de la métrique g_ε . Il sera nécessaire de perturber cette métrique pour obtenir des hypothèses supplémentaires sur les trajectoires associées au champ de gradient de la fonction de Morse feuilletée généralisée considérée.

2.2.4 Description du voisinage tubulaire à l'aide de la distance d'Agmon

Nous aurons besoin dans la suite d'une forme plus explicite des voisinages tubulaires obtenue à partir de la distance dite d'Agmon. Dans le cas feuilleté qui nous occupe, la distance d'Agmon feuilletée désignera la distance d'Agmon classique sur la variété feuille obtenue à partir de la métrique induite. Plus précisément :

Définition 2.2.1 *La distance d'Agmon feuilletée d_{Agmon} est définie feuille à feuille comme la distance relative à la métrique $|\nabla_{\mathcal{F}} f|^2 dx^2$ dégénérée sur L où dx^2 désigne la métrique riemannienne sur L :*

$$d_{Agmon}(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \int_x^y |\nabla_{\mathcal{F}} f(\gamma(t))|^2 dt$$

Par convention, $d_{Agmon}(x, y) = \infty$ si les points x et y ne sont pas sur la même feuille.

Commençons par préciser la forme du voisinage tubulaire des variétés C_ε^q . Notons :

$$N_{2,\delta,\varepsilon}^q = \{x \in M / d_{Agmon}(x, C_\varepsilon^q) \leq \delta\}$$

où les réels δ et ε correspondent à ceux exhibés précédemment. Quitte à réduire δ et grâce à la compacité de C_ε^q , nous pouvons supposer que l'ensemble $N_{2,\delta,\varepsilon}^q$ est inclus dans le voisinage tubulaire $N_{2,\varepsilon}^q$. Nous pouvons donc remplacer le voisinage tubulaire $N_{2,\varepsilon}^q$ par $N_{2,\delta,\varepsilon}^q$ qui est un voisinage plus fin et dont nous avons une forme plus précise.

Nous définissons alors $N_{2,\delta,\varepsilon}$ comme la réunion sur q des ensembles $N_{2,\delta,\varepsilon}^q$. Nous avons alors plus simplement :

$$N_{2,\delta,\varepsilon} = \{x \in M / d_{Agmon}(x, C_\varepsilon) \leq \delta\}$$

Pour donner une description plus précise du voisinage $N_{1,\delta,\varepsilon}$, nous devons d'abord étudier la manière dont les points critiques sont répartis feuille à feuille. Le lemme suivant permet d'isoler des points critiques à condition que ces points soient suffisamment loin de la caustique.

Lemme 2.2.1 *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ (dépendant de ε) tels que pour tout couple de points critiques (x, y) n'appartenant pas au voisinage Γ_ε , on ait :*

$$d_{Agmon}(x, y) > \delta$$

La démonstration de ce résultat repose principalement sur la forme du voisinage tubulaire $N_{2,\delta,\varepsilon}$ ainsi que celle de la fonction dans ce voisinage.

En particulier, sur toute feuille L non dégénérée, il est possible de trouver un réel $\delta_L > 0$ tel que tous les points critiques soient à une distance d'au moins δ_L . Nous pouvons

même préciser ce résultat pour qu'il soit valable pour des points critiques au voisinage de la caustique.

Lemme 2.2.2 *Tout couple de points critiques de même indice vérifie :*

$$d_{Agmon}(x, y) > \delta_0$$

avec δ_0 un réel indépendant des points critiques et de leur indice.

La preuve de ce résultat découle immédiatement de la forme de la fonction dans le voisinage tubulaire $N_{\delta, \varepsilon}$ de la variété critique Σ .

Nous pouvons maintenant définir des voisinages de la variété critique Σ ainsi que des variétés critiques C^q et C_ε^q possédant de bonnes propriétés.

Notations 2.2.1 *Pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, posons :*

$$N_\delta = \{x \in M / d_{Agmon}(x, \Sigma) \leq \delta\}$$

$$N_\delta^q = \{x \in M / d_{Agmon}(x, C^q) \leq \delta\}$$

$$N_\delta^\varepsilon = \{x \in M / d_{Agmon}(x, C_\varepsilon) \leq \delta\}$$

$$N_{\delta, \Gamma}^\varepsilon = \{x \in M / d_{Agmon}(x, \Gamma_\varepsilon) \leq \delta\}$$

Pour δ suffisamment petit (avec ε fixé), nous pouvons supposer que N_δ est inclus dans le voisinage tubulaire feuilleté $N_{\delta, \varepsilon}$ de sorte que la fonction admet une forme normale dans ce voisinage. N_δ forme alors un voisinage tubulaire de C dans M ainsi que de Σ dans la variété feuille. Les deux lemmes précédents nous permettent d'établir la proposition suivante qui résume les propriétés des ensembles que nous venons d'introduire.

Proposition 2.2.2

1. *Il existe δ_0 tel que pour tout $q \in \{0, 1, \dots, p\}$ l'ensemble $N_{\delta_0}^q$ soit un voisinage tubulaire de C^q dans M tel que pour toute feuille L , l'intersection $L \cap N_{\delta_0}^q$ soit une réunion disjointe (dénombrable) de boules de rayon δ_0 (pour la distance d'Agmon), centrées en un point critique de C^q et ne contenant aucun autre point critique de C^q .*
2. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta (= \delta(\varepsilon))$ tels que l'ensemble N_δ^ε soit un voisinage tubulaire de C_ε^q dans M tel que pour toute feuille L , l'intersection $L \cap N_\delta^\varepsilon$ soit une réunion disjointe (dénombrable) de boules de rayon δ (pour la distance d'Agmon), centrées en un point critique de C_ε et ne contenant aucun autre point critique.*

La principale différence entre N_δ et le voisinage $N_{\delta, \varepsilon}$ introduit dans la section précédente se situe au voisinage de la caustique. En effet, si l'on restreint ces deux voisinages à une carte feuilletante au voisinage de la caustique, l'intersection de $N_\delta \cap \Sigma$ avec les plaques de la carte considérée n'est jamais vide alors que cela pouvait être le cas avec l'ensemble $N_{\delta, \varepsilon} \cap \Sigma$.

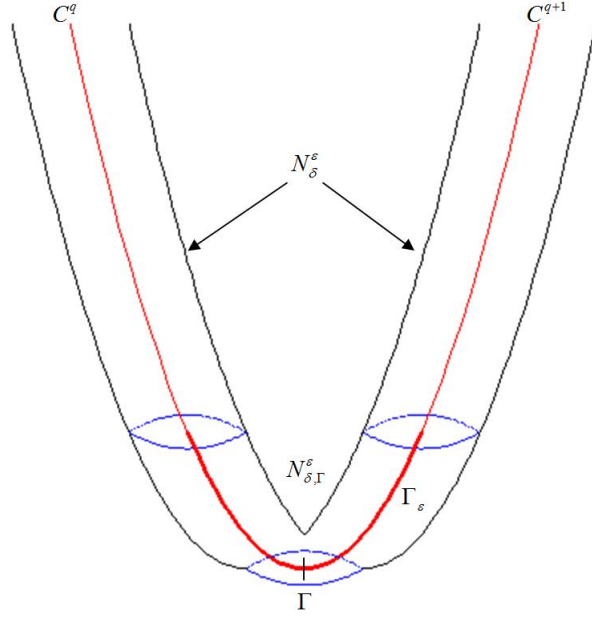


FIG. 2.2 – Voisinage tubulaire de la variété critique

Dans leur définition, les ensembles N_δ et N_δ^q ne dépendent pas de ε . Cependant, pour assurer les inclusions $N_\delta \subset N_{\delta,\varepsilon}$ et $N_\delta^q \subset N_{\delta,\varepsilon}^q$, nous avons fixé δ en fonction de ε . Pour plus de simplicité, nous n'indiquerons plus cette dépendance dans la suite.

Dans la suite, nous considérons le voisinage N_δ au lieu du voisinage $N_{\delta,\varepsilon}$. La description précise des voisinages tubulaires N_δ^q et $N_{\delta,\varepsilon}^q$ sur chaque feuille nous sera utile pour l'étude des trajectoires associées au champ de gradient feuilleté.

Remarque 2.2.1 Les ensembles $N_{1,\delta,\varepsilon}$ et $N_{2,\varepsilon}$ que nous avons définis dans la section 2.2.3 sont dorénavant remplacés par les ensembles $N_{\delta,\Gamma}^\varepsilon$ et N_δ^ε respectivement.

2.3 Champ de gradient feuilleté et trajectoires associées

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ une fonction de Morse feuilletée généralisée. Cette section étudie les propriétés des trajectoires du champ de gradient feuilleté associé à la fonction f . Nous ne considérerons ici que des feuilles L non dégénérées, c'est-à-dire ne contenant que des points critiques de Morse.

2.3.1 Définition du champ de gradient feuilleté

Il y a deux manières de définir ce champ de vecteurs. On peut le voir comme un champ de vecteurs sur la variété feuille non compacte a priori. Il s'agit alors d'un champ de gradient classique que l'on note X_L , défini localement par :

$$X_{L(u,t)}(u,t) = \text{grad}(f(u,t)) = \text{grad}_U(f(u,t))$$

Pour faire apparaître la dépendance par rapport au paramètre transverse, il faut voir ce champ comme défini globalement sur la variété M . Dans ce cas, nous le notons X_M . Dans toute carte feuilletante $\Omega = U \times T$ de M , le champ X_M est défini localement par :

$$X_M(u,t) = (\text{grad}_U f(u,t), 0)$$

Dans la suite, nous utiliserons indifféremment ces deux points de vue.

Le champ X_M peut être vu comme le dual de la 1-forme définie localement par :

$$\alpha = (d_U f, 0)$$

La restriction du champ X_M à chaque feuille L nous donne le champ X_L et on peut le voir comme le dual de la 1-forme définie localement comme la restriction $\alpha_U = d_U f$ à la plaque $U \times \{t\}$ munie de la métrique induite.

Rappelons que si g est la métrique alors le champ dual de la 1-forme α est le champ $X_\alpha = X_M$ vérifiant :

$$\forall \nu \in T_x M \quad g(X_\alpha(x), \nu) = \alpha(x) \cdot \nu$$

En particulier, le champ restreint doit vérifier :

$$\forall \nu = (\nu_U, \nu_T) \in T_{(u,t)} M \quad g(X_L(u,t), \nu_U) = d_U f(u,t) \cdot \nu_U$$

Le champ feuille à feuille dépend du point et nous devrions le noter $X_{L(u,t)}$ où $L(u,t)$ désigne la feuille passant par (u,t) mais pour éviter d'alourdir les notations, nous omettrons cette référence lorsqu'elle est clairement sous-entendue.

2.3.2 Propriétés du champ

La variété globale étant compacte, nous savons que le champ X_M est complet, c'est-à-dire que toutes les trajectoires non périodiques sont définies sur \mathbb{R} tout entier. Rappelons qu'une trajectoire (ou une orbite) d'un champ de vecteurs est une courbe intégrale de ce champ, c'est-à-dire une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans M vérifiant :

$$\dot{\gamma} = \nabla_{\mathcal{F}} f(\gamma)$$

Nous avons la propriété suivante.

Propriété 2.3.1 *Le champ X_L obtenu par restriction du champ X_M à chaque feuille L est complet.*

Nous donnons une preuve de ce résultat car cela permet de montrer le lien entre les trajectoires associées à chacun des deux champs (global et restreint), ce qui nous sera utile par la suite.

Preuve : Une trajectoire de X_M est un chemin γ de classe \mathcal{C}^1 tracé sur la variété M et vérifiant :

$$\dot{\gamma}(r) = X_M(\gamma(r))$$

Ecrivons alors $\gamma = (\gamma_U, \gamma_T)$ en coordonnées locales. Par définition du champ, nous obtenons :

$$(\dot{\gamma}_U(r), \dot{\gamma}_T(r)) = (\text{grad}_U f(\gamma_U(r), \gamma_T(r)), 0)$$

Ceci est équivalent au système :

$$\begin{cases} \gamma_T(r) = \gamma_T(0) \\ \dot{\gamma}_U(r) = \text{grad}_U f(\gamma_U(r), \gamma_T(0)) \end{cases}$$

Or par définition, une trajectoire du champ restreint $X_{L_{(u,t)}}$ avec $t = \gamma_T(0)$ est un chemin $\tilde{\gamma}$ de classe \mathcal{C}^1 tracé sur la variété $L_{(u,t)}$ et vérifiant :

$$\dot{\tilde{\gamma}}(r) = X_{L_{(u,t)}}(\tilde{\gamma}(r), \gamma_T(0)) = \text{grad}_U f(\tilde{\gamma}(r), \gamma_T(0))$$

Il est donc clair que l'on passe d'une trajectoire du champ X_L à une trajectoire du champ X_M en lui ajoutant localement une composante transverse constante.

On en déduit alors par complétude du champ global que le champ restreint est lui aussi complet. Toutes les trajectoires que nous considérerons seront donc définies sur \mathbb{R} tout entier. ■

Rappelons qu'un point singulier du champ est un point $x \in M$ tel que $X_M(x) = 0$. Par définition du champ, les points singuliers du champ sont les points critiques de la fonction restreinte à chaque feuille et en particulier :

$$X_M(x) = 0 \Leftrightarrow \text{grad}_{L_x}(f(x)) = 0 \Leftrightarrow X_U(x) = 0$$

Cela signifie que les points critiques du champ défini globalement et du champ restreint sont exactement les mêmes (on ne supprime pas de points critiques en considérant la restriction du champ).

Remarque 2.3.1 *Si l'on modifie la métrique en conservant la fonction, le nouveau champ que nous définirons aura aussi les mêmes points singuliers que le champ initial.*

Comme le champ de gradient feuilleté est un champ de gradient usuel feuille à feuille, les points singuliers du champ sont les seules orbites périodiques. En particulier, il n'existe pas de trajectoires non constantes passant par un point singulier du champ. Les points singuliers sont donc les limites en $+\infty$ et $-\infty$ (les bornes du domaines) des trajectoires non constantes du champ.

Finalement, le champ de gradient feuilleté n'a que deux types de trajectoires :

1. Les trajectoires constantes (périodiques) qui correspondent aux points critiques de la fonction ;
2. Les trajectoires non constantes définies sur \mathbb{R} qui ne passent par aucun point critique et dont les limites en $\pm\infty$ sont des points critiques.

2.3.3 Variétés stables et instables

Intéressons nous maintenant aux variétés stables et instables associées au champ de gradient feuilleté. En chaque point singulier du champ X_L (les points critiques de la fonction), on définit la variété stable et la variété instable (« unstable ») de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W_{L_x}^s(x) &= \left\{ y \in L_x / \exists \gamma, \dot{\gamma} = X_{L_x}(\gamma), \gamma(0) = y, \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = x \right\} \\ W_{L_x}^u(x) &= \left\{ y \in L_x / \exists \gamma, \dot{\gamma} = X_{L_x}(\gamma), \gamma(0) = y, \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = x \right\} \end{aligned}$$

Plus concrètement, la variété stable d'un point x est la réunion de toutes les trajectoires du champ qui arrivent au point x et la variété instable est la réunion de toutes les trajectoires qui partent du point x .

Les variétés stables et instables sont naturellement des sous-variétés de la variété qui supporte le champ (voir [24] pour plus de détails). Plus précisément, $W_{L_x}^s$ et $W_{L_x}^u$ sont des sous-variétés de L_x . D'après les propriétés des champs de gradient, nous avons pour tout point singulier x :

$$T_x W_{L_x}^s(x) \oplus T_x W_{L_x}^u(x) = T_x L_x$$

Dans le cas d'un champ de gradient, la dimension de la variété stable est égale à l'indice du point critique considéré, ce qui correspond aussi au nombre de valeurs propres négatives du Hessien de f . Dans notre cas, le point critique est supposé non dégénéré donc le Hessien n'a que des valeurs propres non nulles. Nous avons donc :

$$\dim W_{L_x}^s(x) = \text{ind}(x) \text{ et } \dim W_{L_x}^u(x) = p - \text{ind}(x)$$

Notations 2.3.1 Pour tout couple de points critiques (x, y) , posons :

$$\mathcal{M}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$$

Il s'agit de l'ensemble des trajectoires qui partent de x et qui arrive en y .

Rappelons que l'ensemble de toutes les courbes intégrales d'un champ de vecteurs X se représente par le flot intégral associé à ce champ X . Il s'agit de la famille $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications (partiellement définies) de M dans M telle que $\phi_t(x)$ soit le point atteint au bout du temps t à partir de x :

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t(x) = \gamma_x(t) \end{aligned}$$

où γ_x est la trajectoire passant par le point x .

Les trajectoires sont ici définies à reparamétrisation près. Tout élément $z \in \mathcal{M}(x, y)$ détermine une trajectoire unique, à reparamétrisation près, qui relie le point y au point x . Notons $[\gamma_z]$ cette trajectoire, qui est en fait une classe d'équivalence de trajectoires.

Si deux points z, z' appartenant à $\mathcal{M}(x, y)$ vérifient $[\gamma_z] = [\gamma_{z'}]$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \phi_t(z)$. Cela induit une action naturelle de \mathbb{R} sur $\mathcal{M}(x, y)$ donnée par le flot du champ de gradient feuilleté :

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R} \times \mathcal{M}(x, y) \rightarrow \mathcal{M}(x, y) \\ (t, z) &\mapsto \phi_t(z) \end{aligned}$$

On note alors $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ le quotient de $\mathcal{M}(x, y)$ par cette action :

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) = \mathcal{M}(x, y) / \mathbb{R}$$

Par définition, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ est une variété de dimension $\dim(\mathcal{M}(x, y)) - 1$.

Remarquons qu'il y a une correspondance (\mathbb{R} – équivariante) bijective entre $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ et l'ensemble des trajectoires (à reparamétrisations près) reliant y à x . Elle est donnée par l'évaluation suivante :

$$\gamma \mapsto \gamma(0)$$

Cela provient du fait que l'action naturelle de \mathbb{R} sur $\mathcal{M}(x, y)$ induit une action naturelle de \mathbb{R} sur l'ensemble des trajectoires reliant y à x donnée par $(t, \gamma(\cdot)) \mapsto \gamma(\cdot + t)$.

2.3.4 Premières propriétés des trajectoires

Etablissons tout d'abord que les trajectoires du champs de gradient feuilleté ont une énergie finie et sont de longueur uniformément bornée.

Les propriétés que nous allons démontrer dans cette section ne dépendent que de la forme de la métrique dans le voisinage N_δ .

2.3.4.1 Propriétés de l'énergie des trajectoires

Rappelons que le champ de gradient feuilleté n'a que deux types de trajectoires :

- les trajectoires constantes (égales à un point critique) ;
- les trajectoires non constantes γ dont les extrémités sont deux points critiques :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = x^\pm$$

L'énergie d'une trajectoire γ du champ de gradient feuilleté est définie par :

$$E(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} |\dot{\gamma}(s)|^2 ds$$

Si la trajectoire est constante alors son énergie est nulle. Dans le cas d'une trajectoire non constante, son énergie peut être majorée par une constante indépendante des feuilles.

Lemme 2.3.1 *Soit γ une trajectoire non constante sur une feuille alors :*

$$E(\gamma) \leq 2 \max |f|$$

Preuve : Considérons une trajectoire γ non constante alors nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\gamma}(s)|^2 ds &= \int_{s_1}^{s_2} \langle \dot{\gamma}(s) | \nabla_{\mathcal{F}} f(\gamma(s)) \rangle ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) ds \\ &= f(\gamma(s_2)) - f(\gamma(s_1)) \\ &\leq 2 \max_M |f| \end{aligned}$$

En faisant tendre s_1 et s_2 vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement, nous obtenons le résultat cherché. ■

2.3.4.2 Borne uniforme pour la longueur des trajectoires

Nous allons démontrer que les trajectoires associées au champ de gradient feuilleté de la fonction considérée ont une longueur majorée par une constante indépendante des feuilles. En fait, nous pouvons même améliorer ce résultat en ajoutant une condition sur la métrique. Plus précisément, on a :

Théorème 2.3.1 *Les longueurs des trajectoires appartenant à des feuilles non dégénérées sont bornées par une constante indépendante des feuilles. Plus précisément, si l'on fixe une métrique g sur toute la variété, alors pour toute métrique suffisamment proche de g coïncidant avec g dans le voisinage tubulaire $N_{2,\delta,\varepsilon}$ de C_ε , les longueurs des trajectoires sont encore bornées par la même constante.*

La démonstration de ce résultat est inspirée du travail de *Castelvecchi* dans [9]. Toutefois, *Castelvecchi* a choisi de déformer la fonction afin d'obtenir une variété critique et un voisinage tubulaire adapté. Nous avons fait le choix de ne pas perturber la fonction, et nous allons voir que le résultat de *Castelvecchi* demeure.

Le principe de la preuve consiste à découper chaque trajectoire en quatre ensembles contenant des composantes connexes particulières, et à montrer que la longueur de la trajectoire dans chacun de ces ensembles peut être majorée par une borne indépendante des feuilles.

Démonstration du Théorème 2.3.1 : Rappelons tout d'abord pourquoi chaque trajectoire a une longueur finie. Soit γ une trajectoire reliant deux points critiques x et y , qui sont les limites en $\pm\infty$ de la fonction $\gamma(t)$. En ajoutant les points x et y à l'image de la courbe γ vue comme un sous-ensemble de la feuille, nous obtenons un ensemble fermé. Cela revient simplement à considérer la fermeture de l'image de γ :

$$\overline{\text{Im } \gamma} = \text{Im } \gamma \cup \{x\} \cup \{y\}$$

Cet ensemble peut aussi être vu comme un sous ensemble fermé de la variété M . La compacité de M entraîne alors la compacité de $\overline{\text{Im } \gamma}$ ce qui implique que cette courbe est bornée en longueur. La difficulté de la preuve consiste donc à montrer que l'on peut borner *uniformément* la longueur des trajectoires.

Conservons les notations précédentes. En particulier, N_δ^q désigne le voisinage tubulaire feuilleté de la variété critique C^q :

$$N_\delta^q = \{x \in M / d_{\text{Agmon}}(x, C^q) \leq \delta\}$$

et N_δ désigne le voisinage de la variété critique Σ :

$$N_\delta = \{x \in M / d_{\text{Agmon}}(x, \Sigma) \leq \delta\}$$

Remarquons que pour toute feuille L non dégénérée, nous avons :

$$N_\delta \cap L = \{x \in L / d_{\text{Agmon}}(x, C) \leq \delta\}$$

Cela signifie que si nous restreignons l'étude à des feuilles non dégénérées, nous pouvons remplacer N_δ par l'ensemble :

$$\{x \in M / d_{\text{Agmon}}(x, C) \leq \delta\}$$

Dans la suite, nous noterons de la même manière ces deux ensembles.

Nous allons décomposer la courbe en composantes connexes, celles qui sont dans $N_{\frac{\delta}{2}}$, celles qui sont dans $N_\delta \setminus N_{\frac{\delta}{2}}$, et enfin les autres. Nous allons tout d'abord montrer que la courbe doit forcément passer un temps fini en dehors de $N_{\frac{\delta}{2}}$, puis qu'il n'y a qu'un nombre fini de morceaux qui passent dans $N_{\frac{\delta}{2}}$. Il suffira alors, à l'aide de ces informations, de majorer chaque morceau séparément.

Fixons γ une trajectoire (non constante) reliant deux points critiques x^- et x^+ sur une feuille L non dégénérée. Cela implique que les points critiques x^- , x^+ sont des points de Morse. Dans la suite, nous noterons de la même manière γ et son image. Définissons :

$$\gamma' = \gamma \cap N_\delta$$

Il s'agit de la partie de la trajectoire qui passe près d'un point critique. On peut décomposer γ' sous la forme :

$$\gamma' = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma''$$

avec γ^+ resp. γ^- la première et respectivement la dernière composante connexe de γ' , et enfin γ'' le reste. La première composante connexe de γ correspond à la partie de la courbe entre x^- et le premier point qui sort de N_δ . Si la trajectoire ne sort pas de N_δ alors $\gamma' = \gamma^+$.

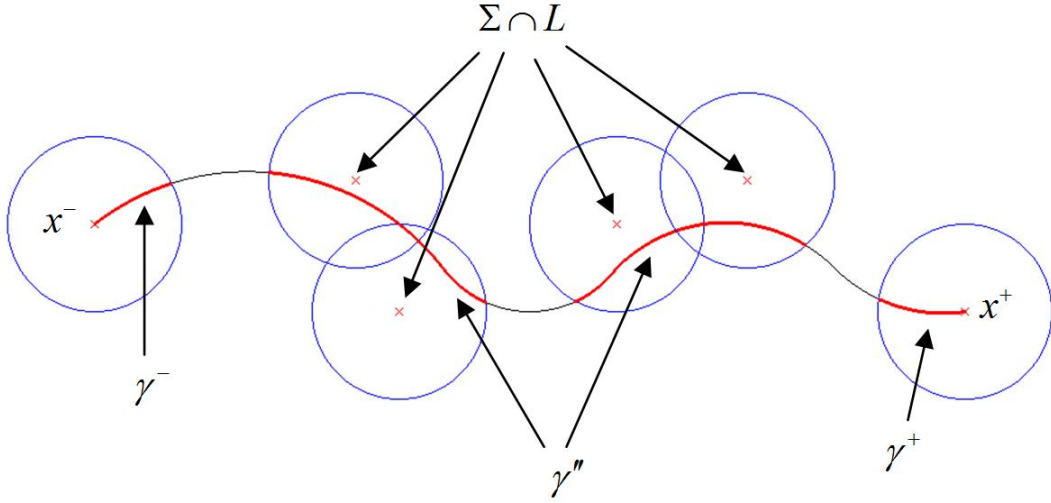


FIG. 2.3 – Première décomposition de γ en composantes connexes

- 1^{ère} étape : Montrons que le temps passé en dehors de $N_{\frac{\delta}{2}}$ est fini.

Posons :

$$E = \left\{ s \in \mathbb{R} / \gamma(s) \notin N_{\frac{\delta}{2}} \right\}$$

Sur $M \setminus N_{\frac{\delta}{2}}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|\nabla_F^g(f)| > 2\alpha$. L'existence de α découle de la compacité de $M \setminus \overset{\circ}{N}_{\frac{\delta}{2}}$ et de la continuité du Laplacien. En particulier, pour toute métrique \tilde{g} suffisamment proche de la métrique considérée g , nous avons encore $|\nabla_F^g(f)| > \alpha$. Or nous savons que :

$$\mu(E) \alpha^2 \leq \int_E |\dot{\gamma}|^2 \leq 2 \max |f|$$

donc $\mu(E) \leq \tau$ pour $\tau = 2\alpha^{-2} \max |f|$, ce qui signifie que le temps passé en dehors de $N_{\frac{\delta}{2}}$ est fini.

- 2^{ème} étape : Montrons que la partie de la courbe γ en dehors de $N_{\frac{\delta}{2}}$ est bornée en longueur.

Nous avons :

$$\int_E |\dot{\gamma}| = \int_E |\nabla_F^g(f(\gamma))| \leq \mu(E) \max |\nabla_F^g(f)| \leq \tau \max |\nabla_F^g(f)|$$

Donc il existe une constante B_1 telle que :

$$\int_E |\dot{\gamma}| \leq B_1$$

Remarquons que l'on peut choisir la constante afin que le résultat soit valable pour toute métrique \tilde{g} suffisamment proche de g .

- 3^{ème} étape : Montrons que le nombre de composantes connexes dans $N_{\frac{\delta}{2}}$ est borné.

Pour la feuille $L = L_{x^+} = L_{x^-}$, l'ensemble $N_\delta \cap L_{x^+}$ est une réunion (dénombrable) de boules centrées en un point critique et de rayon δ :

$$N_\delta \cap L_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \delta)$$

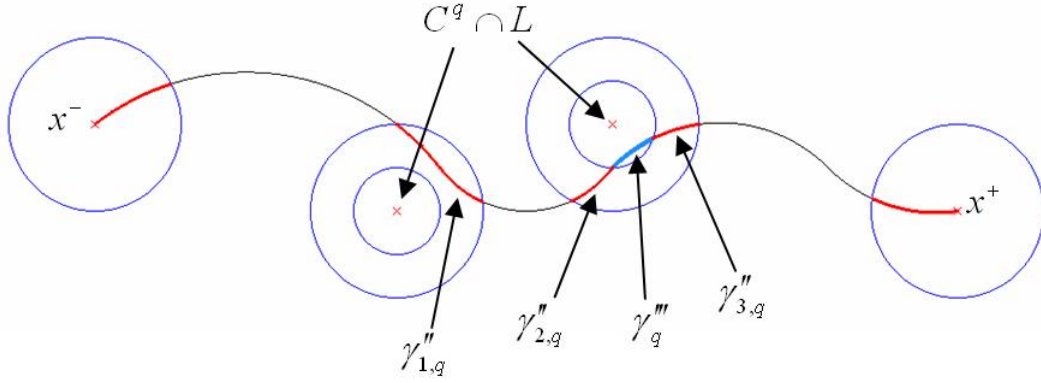
Toutefois, contrairement à la preuve de *Castelvecchi*, les boules $B(x_n, \delta)$ ne sont pas forcément disjointes (ceci est le cas au voisinage de la caustique). Cependant, d'après la proposition 2.2.2, nous pouvons isoler les points critiques de même indice. Ceci nous amène à distinguer l'indice des points critiques x_n .

Fixons donc un réel q . L'ensemble $N_\delta^q \cap L$ est une réunion dénombrable disjointe de boules centrées en un point critique d'indice q et de rayon δ , et ne contenant aucun autre point critique d'indice q . La trajectoire étant compacte (en ajoutant les deux extrémités), nous pouvons affirmer qu'elle ne coupe qu'un nombre fini de telles boules. Ceci étant valable pour toute valeur de q , nous en déduisons que γ ne coupe qu'un nombre fini de boules centrées en un point critique :

$$\gamma \cap N_\delta \subset \bigcup_{kn \in [1; d]} B(x_n, \delta)$$

Les boules $B(x_n, \delta)$ ne sont pas forcément disjointes et les composantes connexes dans N_δ ne sont pas forcément contenues dans une seule boule. Nous allons montrer, en utilisant la forme locale de la fonction, que nous pouvons obtenir un majorant de la longueur des composantes connexes. A cet effet, définissons de nouvelles composantes connexes en tenant compte de l'indice des points. Pour tout q , posons :

$$\gamma_q'' := \gamma'' \cap N_\delta^q$$

FIG. 2.4 – Décomposition de γ_q'' en composantes connexes

Nous définissons aussi $\gamma_q''' = \gamma_q'' \cap N_{\frac{\delta}{2}}^q$ et nous décomposons $\gamma_q'' \setminus \gamma_q'''$ en composantes connexes :

$$\gamma_q'' = \gamma_q''' \cup \gamma_{1,q}''' \cup \dots \cup \gamma_{r,q}''' \quad (0 \leq r < \infty)$$

L'observation suivante est cruciale pour la suite de la démonstration.

Lemme 2.3.2 *Dans le cas où la métrique est plate dans le voisinage N_δ^q , une trajectoire ne peut pas passer par $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ puis y revenir ensuite sans sortir de N_δ^q .*

Preuve du Lemme 2.3.2 : Comme δ a été choisi suffisamment petit pour avoir une forme normale de la fonction dans chaque voisinage N_δ^q , nous connaissons la forme du champ associé à la métrique plate. Les feuilles considérées ne contiennent que des points de Morse, les trajectoires sont donc localement de la forme :

$$\gamma(s) = (c_1 e^{-s}; \dots; c_q e^{-s}; c_{q+1} e^s; \dots; c_p e^s)$$

où les c_i sont des constantes. Cette forme explicite des trajectoires nous permet de vérifier que toute trajectoire qui sort de N_δ^q , sortira aussi de $N_{\frac{\delta}{2}}^q$. ■

Dans la décomposition de γ_q'' en composantes connexes et pour la métrique plate, les éléments $\gamma_{i,q}''$ ont donc une extrémité sur N_δ^q et une sur $N_{\frac{\delta}{2}}^q$, ou bien les deux sur N_δ^q , mais ne peuvent pas avoir leurs deux extrémités sur $N_{\frac{\delta}{2}}^q$.

Cependant, dans le cas où le centre de la boule contenant $\gamma_{i,q}''$ est un point critique appartenant au voisinage de la caustique Γ_ε , la métrique induite localement n'est pas la métrique plate. Nous allons par contre utiliser le lemme 2.3.2 pour montrer que la partie de la trajectoires dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ est bornée en longueur par une constante indépendante des feuilles, puis nous démontrerons que ce résultat reste valable pour la métrique induite. Jusqu'à l'étape 5, la métrique induite dans N_δ^q est supposée plate.

Notons s_q le nombre de composantes connexes $\gamma''_{i,q}$ qui ont une et une seule extrémité dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$, l'autre étant dans N_δ^q . Réordonnons les $\gamma''_{i,q}$ de sorte que $\gamma''_{s_q+1,q}, \dots, \gamma''_{r,q}$ ne coupent pas $N_{\frac{\delta}{2}}^q$. D'après le lemme 2.3.2, si nous notons d_q le nombre de composantes connexes de γ_q''' (la partie de la trajectoire dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$), nous avons $2d_q = s_q$.

Puisque l'on a :

$$\text{longueur}(\gamma_i'') \geq d_{\text{Agmon}}(\partial N_\delta^q, \partial N_{\frac{\delta}{2}}^q) = \frac{\delta}{2}$$

et :

$$\sum_{i=1}^{s_q} \text{longueur}(\gamma_i'') \leq \text{longueur}(\gamma|_E) \leq B_1$$

on en déduit :

$$s_q \frac{\delta}{2} \leq B_1$$

Mais alors, comme $2d_q = s_q$, on en conclut que :

$$d_q \leq \widetilde{B}_1$$

avec $\widetilde{B}_1 = \frac{B_1}{\delta}$. Ainsi le nombre de composantes connexes dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ est borné.

- **4^{ème} étape : Majoration de la longueur de la partie de la trajectoire dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ (cas de la métrique plate).**

Comme nous l'avons déjà précisé, nous connaissons la forme explicite du champ dans le voisinage $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ associée à la métrique plate. D'après la forme du champ, nous pouvons vérifier que la longueur de chaque morceau passant dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$ est majorée par δ . Remarquons que cette borne est aussi valable pour les points limites si l'indice q correspond à l'indice de l'un de ces points.

Posons alors $B_{2,q} = (\widetilde{B}_1 + 1)\delta$. Nous obtenons ainsi une borne pour la longueur de la partie de la trajectoire passant dans $N_{\frac{\delta}{2}}^q$. Ce résultat étant valable pour tout q , le nombre

$B_2 = \sum_{q=1}^p B_{2,q} = p\delta(\widetilde{B}_1 + 1)$ est un majorant (indépendant de q) pour la longueur de la partie de la trajectoire dans $N_{\frac{\delta}{2}}$.

- **5^{ème} étape : Fin de la démonstration du théorème.**

Encore une fois, l'étape 4 n'est valable que pour une métrique qui est plate dans le voisinage N_δ . Nous allons maintenant l'étendre à la métrique considérée. A cet effet, notons \widetilde{g} la métrique plate pour laquelle le résultat est démontré.

Les métriques g et \tilde{g} ne diffèrent que dans le voisinage $N_{1,\delta,\varepsilon}$ (le voisinage tubulaire du voisinage Γ_ε de la caustique). Par compacité de M , nous pouvons recouvrir $N_{1,\delta,\varepsilon}$ par un nombre fini de cartes de types naissance-mort. Il suffit d'établir le résultat dans ces cartes car une partition de l'unité nous permettra d'obtenir le résultat global.

Sur chaque carte, nous pouvons trouver une famille continue $(a_{i,j}^r)_{r \in [0;1]}$ de fonctions continues et bornées de telle sorte que, pour tout $r \in [0;1]$, la fonction g^r définie par

$$g_{(u,t)}^r = \sum_{i,j} a_{i,j}^r(u,t) du_i du_j$$

soit une métrique (sur la carte) qui vérifie :

$$\begin{aligned} - g_{(u,t)} &= g_{(u,t)}^1 (= \sum a_{i,j}^1(u,t) du_i du_j) ; \\ - \tilde{g}_{(u,t)} &= g_{(u,t)}^0 (= \sum a_{i,j}^0(u,t) du_i du_j) . \end{aligned}$$

L'existence de telles fonctions résulte simplement du caractère convexe de l'espace des métriques.

Les trajectoires du champ de gradient associé à la métrique g^r sont des fonctions $\gamma^r(s) = (\gamma_i^r(s))_{0 \leq i \leq p}$ solutions des équations différentielles suivantes :

$$\dot{\gamma}_i^r(s) = \sum_{j=1}^p a_{i,j}^r(\gamma^r(s)) \frac{\partial f}{\partial u_j}(\gamma^r(s))$$

où les $(u_j)_j$ désignent les coordonnées longitudinales. Définissons alors la matrice :

$$A^r = [a_{i,j}^r]_{0 \leq i,j \leq p}$$

ainsi que la fonction $\phi_{A^r}(x) = (\phi_{A^r}^i(x))_{0 \leq i \leq p}$ en posant :

$$\phi_{A^r}^i(x) = \sum_{j=1}^p a_{i,j}^r(x) \frac{\partial f}{\partial u_j}(x)$$

Les trajectoires du champ de gradient associé à la métrique g^r sont alors les solutions de l'équation :

$$\dot{\gamma}^r(s) = \phi_{A^r}(\gamma^r(s))$$

En notant simplement ϕ_r au lieu de ϕ_{A^r} , nous reconnaissons une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Comme la différentielle de la fonction ϕ_r est uniformément bornée, la théorie classique des équations différentielles à paramètres nous permet de démontrer que les solutions dépendent continûment du paramètre r (Voir par exemple [23]). Comme de plus, la métrique g^r dépend continûment du paramètre r , nous obtenons que la longueur de la trajectoire est continue par rapport au paramètre r . Le caractère compact de la variété M nous permet alors d'obtenir ce résultat sur toute la variété.

Pour tout r dans $[0;1]$, notons γ^r les trajectoires associées à la fonction f et à la métrique g^r . Définissons maintenant l'ensemble suivant :

$$\mathcal{K} = \{R \in [0;1] / \exists B > 0, \forall r \in [0;R] \forall \gamma^r \text{ longueur}(\gamma^r) \leq B\}$$

Par construction, il est clair que ce sous-ensemble de $[0; 1]$ est un intervalle fermé. De plus, cet ensemble est non vide car nous avons démontré l'existence d'une constante B_2 pour la longueur des trajectoires associées à la métrique plate g^0 , c'est-à-dire que $0 \in \mathcal{K}$. Posons alors :

$$R_0 = \sup \mathcal{K}$$

D'après les propriétés de \mathcal{K} , R_0 est bien défini et appartient à \mathcal{K} . Notons alors K_1 la borne associée. Supposons que $R_0 < 1$. Par continuité de la longueur des trajectoires par rapport au paramètre r , nous savons qu'une déformation suffisamment petite du paramètre entraînera une petite déformation de la longueur. En particulier, il existe $\varepsilon_{R_0} > 0$ (et que l'on peut choisir plus petit que $1 - R_0$) tel que pour tout $r \in [R_0; R_0 + \varepsilon_{R_0}]$, la longueur des trajectoires associées à la métrique g^r soit bornée par $2 \times K_1$. Mais cela implique que $R_0 + \varepsilon_{R_0}$ appartient à \mathcal{K} , ce qui contredit le fait que R_0 est la borne supérieure de \mathcal{K} . Nous en déduisons donc que $R_0 = 1$.

Nous venons donc de démontrer qu'il existe une constante B telle que pour tout $r \in [0; 1]$, les trajectoires associées à la métrique g^r sont bornées en longueur par B . En particulier, c'est le cas pour la métrique g^1 qui est la métrique considérée. Nous notons encore B_2 cette nouvelle constante.

Ainsi, nous avons montré que la partie de la trajectoire qui est dans $N_{\frac{\delta}{2}}$ est majorée en longueur par une constante B_2 indépendante des feuilles, et cela pour la métrique considérée qui n'est pas forcément la métrique plate dans le voisinage tubulaire de Γ_ε . De plus, la dépendance continue par rapport à la métrique, nous permet de supposer que cette constante est encore valable pour des métriques suffisamment proches de la métrique considérée.

Pour conclure, il suffit maintenant de majorer la longueur totale de la trajectoire par la constante $B_1 + B_2$. Cette borne est indépendante de la feuille ainsi que des points critiques considérés. Le résultat est donc démontré. ■

Notons que nous avons démontré au passage le résultat très utile suivant :

Propriété 2.3.2 *Le champ de gradient feuilleté dépend continûment de la métrique. En particulier, si l'on considère une famille de métriques $(g_r)_{r \in [0; 1]}$ permettant de passer d'une métrique g_0 à une métrique g_1 , les trajectoires γ_r associées au champ X_r dual de la 1-forme $\alpha = (df, 0)$ pour la métrique g_r dépendent continûment du paramètre r .*

2.3.4.3 Majoration du nombre de points d'indice $q + 1$ reliés à un point fixé d'indice q

Des résultats précédents, on déduit :

Proposition 2.3.1 *Pour tout point critique x d'indice q , le nombre de points critiques y d'indice $q+1$ reliés au point x par une trajectoire du champ de gradient feuilleté est borné par un nombre N_2 indépendant des feuilles et du point de départ x .*

Preuve : Cela découle du fait que les longueurs des trajectoires sont uniformément bornées et de la proposition 2.2.2. En effet, considérons un point critique x d'indice q . Toute trajectoire partant de x est contenue dans une boule $B(x; \eta)$ où η est une borne pour la longueur des trajectoires indépendante de la feuille et de la trajectoire. Il suffit donc de trouver une borne pour le nombre de points d'indice $q+1$ contenus dans cette boule, cette borne devant être indépendante de x ainsi que de la feuille.

D'après la proposition 2.2.2, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout couple de points critiques (y, y') d'indice $q+1$ sur la variété, on ait :

$$d_{Agmon}(y, y') > 2\beta$$

Le nombre m de points critiques d'indice $q+1$ dans la boule $B(x, \eta)$ est fini car la boule est compacte et les points critiques forment un ensemble discret feuille à feuille. Il y a au moins m boules de rayon β dans la boule $B(x, \eta)$ donc :

$$\text{Vol}(B(x, \eta)) \geq m \text{Vol}(B_\beta)$$

Cela nous donne alors :

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B(x, \eta))}{\text{Vol}(B_\beta)}$$

Les constantes β et η sont indépendantes des feuilles. Nous pouvons donc en conclure que le nombre de points critiques d'indices q et $q+1$ reliés à un point critique fixé est majoré par une constante indépendante des feuilles.

■

Chapitre 3

Hypothèses sur les trajectoires et métrique adaptée

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que, pour une métrique adaptée, localement plate dans un voisinage tubulaire de la variété critique privée d'un voisinage de la caustique, les longueurs des trajectoires du champ de gradient feuilleté reliant deux points critiques sont uniformément bornées par une constante.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que le nombre de trajectoires du champ de gradient feuilleté reliant deux points critiques d'indice q et $q + 1$ est uniformément borné. A cet effet, nous aurons besoin de supposer que le champ de gradient est un champ transverse en un sens que nous préciserons (Cf. 3.1.1).

Afin de pouvoir faire l'hypothèse que la métrique considérée est une « bonne métrique » au sens où le champ de gradient feuilleté est un champ transverse, nous devons nous assurer que :

- l'ensemble des « bonnes métriques » est dense dans celui de toutes les métriques ;
- une métrique plate sur un voisinage de la variété critique (sauf au voisinage de la caustique) peut être approchée par une « bonne métrique » qui conserve la propriété de platitude de la métrique initiale.

Le but de ce chapitre est la démonstration de ces résultats ainsi que de leurs conséquences sur le nombre de trajectoires du champ de gradient reliant deux points d'indice q et $q + 1$.

3.1 Résultats sur la transversalité

Rappelons la notion de transversalité d'un champ, ainsi que les résultats de densité pour les champs transverses sur des variétés.

3.1.1 Transversalité du champ et bonnes métriques

3.1.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *On dit que deux sous variétés A et B de M sont transverses si :*

$$\forall x \in A \cap B \quad T_x A + T_x B = T_x M$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, les variétés A et B sont transverses.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'un champ de vecteurs transverse.

Définition 3.1.2 *On dit que le champ X est transverse si pour tout couple de points singuliers (x, y) , la variété stable $W_X^s(y)$ et la variété instable $W_X^u(x)$ sont transverses.*

Avant d'étudier les propriétés de la condition de transversalité, nous introduisons les notations suivantes pour simplifier la suite des énoncés et des démonstrations. Dans toute la suite, \mathcal{G} désigne l'ensemble des métriques Riemanniennes.

Notations 3.1.1 *Soit V une sous variété de M et α une 1-forme différentielle définie sur V . Notons X_g^α le champ dual associé à la 1-forme α , c'est-à-dire défini par la relation :*

$$\forall v \in T_x M \quad g(X_g^\alpha(x), v) = \alpha_x(v)$$

Le champ de gradient feuilleté que nous considérons est le champ dual de la 1-forme $\alpha = (df, 0)$ ou à sa restriction df . Nous omettrons donc la référence à la forme α et nous noterons donc simplement X_g le champ correspondant associé à la métrique g .

Les champs considérés étant directement liés à la métrique, nous introduisons la définition suivante :

Définition 3.1.3 *Soit V une sous variété de M . Une métrique Riemannienne g de M est une bonne métrique sur V si la restriction du champ X_g à V est transverse.*

Une bonne métrique sur M est donc une métrique telle que le champ est partout transverse.

Rappelons maintenant une propriété très importante de la transversalité pour les variétés.

Propriété 3.1.1 *La condition de transversalité est une condition ouverte.*

Cette propriété signifie que si deux variétés A et B sont transverses alors pour une perturbation suffisamment petite A_ε et B_ε de ces variétés, la condition de transversalité est encore vérifiée, c'est-à-dire que les variétés A_ε et B_ε sont transverses. On en déduit :

Propriété 3.1.2 *La condition de transversalité du champ de gradient feuilleté est une condition ouverte pour les métriques. Plus précisément, si g est une bonne métrique sur une variété M alors il existe un voisinage ouvert O_g de \mathcal{G} constitué de bonnes métriques et contenant g .*

Preuve : D'après la propriété 2.3.2, les trajectoires du champ de gradient feuilleté dépendent continûment de la métrique. Par ailleurs, les points singuliers des champs de gradient associés à des métriques différentes étant les mêmes, les variétés stables (resp. instables) correspondantes sont des variétés de même dimension. En particulier, si les métriques sont suffisamment proches alors les variétés stables et instables associées seront proches aussi. Le caractère ouvert de la condition de transversalité pour les variétés (Cf. 3.1.1) nous permet alors de conclure. ■

3.1.2 Densité des champs transverses

Cette section discute la généricité des champs de gradient. Tous les résultats que nous allons citer sont valables sur des variétés compactes. Bien que les feuilles ne soient pas compactes a priori, cela n'est pas un réel problème dans notre cadre car nous pouvons travailler localement. On considère à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie une variété V compacte.

3.1.2.1 Champ de Kupka-Smale

Ce sont les premiers types de champs pour lesquels on dispose d'un résultat de densité.

Définition 3.1.4 *On dit que le champ de vecteurs X est de type Kupka-Smale (KS) si :*

1. *Toutes les orbites fermées (points singuliers et trajectoires périodiques) de X sont hyperboliques ;*
2. *Pour tout couple (ω, ω') d'orbites fermées, la sous-variété stable de ω et la sous-variété instable de ω' sont transverses.*

Nous avons le résultat de densité suivant (Cf. [24]).

Théorème 3.1.1 *Les champs de KS forment une partie résiduelle (donc dense) de $\Theta(V)$ où $\Theta(V)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs sur V .*

Ce théorème est insuffisant pour discuter le caractère générique des champs de gradient car un champ de KS n'est pas forcément un champ de gradient. La notion de champ de MS permet de remédier à ce défaut.

3.1.2.2 Champ de Morse-Smale

Définition 3.1.5 *On dit qu'un champ est de Morse-Smale (MS) s'il vérifie :*

1. *Le champ X n'a qu'un nombre fini d'orbites fermées et elles sont toutes hyperboliques ;*
2. *Pour tout couple (ω, ω') d'orbites fermées, la sous-variété stable de ω et la sous-variété instable de ω' sont transverses ;*
3. *Pour tout point $x \in V$ dont l'orbite n'est pas fermée, on peut trouver un ouvert U contenant x , et un réel T tels que :*

$$|t| \geq T \Rightarrow \Phi_t(U) \cap U = \emptyset$$

Nous avons le résultat de densité suivant (Cf. [24]).

Théorème 3.1.2 (Smale, 1967-1969) *L'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^2(V)$ dont le gradient est un champ de type MS est un ouvert dense.*

Remarquons que dans le cas d'un champ de gradient, les seules orbites périodiques sont les points singuliers qui correspondent aux points critiques de la fonction, et tous les points critiques (non dégénérés) sont hyperboliques. L'hypothèse (1) des champs de MS se traduit donc par le fait que f n'a qu'un nombre fini de points critiques et l'hypothèse (2) revient à dire que le champ est transverse.

Encore une fois, ce résultat n'est pas suffisant. S'il nous permet d'obtenir l'hypothèse de transversalité, son utilisation implique une perturbation de la fonction et ainsi la perte de la forme locale de cette dernière dans le voisinage tubulaire que nous avons construit au chapitre précédent.

Heureusement, il existe un théorème de densité démontré par *M. Pozniak* qui nous permet de perturber uniquement la métrique afin d'obtenir la transversalité du champ.

3.1.2.3 Résultat de densité de Pozniak

Théorème 3.1.3 (Cf. [64]) *Soit M une variété compacte Riemannienne et g une métrique Riemannienne. On note X_α le champ de vecteurs dual de α pour la métrique g . Supposons que α soit une 1-forme fermée non dégénérée alors il existe un ensemble dense de métriques parmi les métriques Riemanniennes sur M tel que pour ces métriques le champ X_α soit un champ transverse.*

Avant d'appliquer ce théorème au cas des feuilletages, nous allons d'abord vérifier que la 1-forme que nous considérons en satisfait les hypothèses. Rappelons que nous avons deux manières de voir la 1-forme qui définit le champ :

- une sur la variété globale $\alpha = (d_U f, 0)$;
- une sur la variété feuille $\alpha_U = d_U f$.

Le champ dual considéré est alors un champ défini globalement, ou bien feuille à feuille. La transversalité du champ étant étudiée feuille à feuille, nous nous intéressons à la 1-forme α_U .

Il est clair que cette forme est fermée puisqu'elle est exacte :

$$d\alpha_U = d_U d_U f = 0$$

D'autre part, la fonction f est de Morse sauf sur un ensemble négligeable de feuilles. Pour chaque feuille n'appartenant pas à cet ensemble, la restriction de cette 1-forme est non dégénérée.

Ce résultat présente l'avantage de ne pas modifier la fonction considérée. Par contre, notons que le gradient de la fonction dépend de la métrique. Cependant comme nous allons le voir, nous n'allons pas déformer la métrique partout, en particulier, nous conserverons la métrique initiale dans un voisinage tubulaire de la variété critique. Ceci nous permettra de conserver les hypothèses concernant la forme normale de la fonction dans ce voisinage et donc du gradient.

3.2 Densité des métriques vérifiant la condition de transversalité dans le cas feuilleté

Considérons un point x sur la variété et supposons que ce point n'est pas un point critique dégénéré. Cela signifie qu'il s'agit soit d'un point critique de Morse, soit d'un point non critique. Ce point appartient à une carte feuilletante $\Omega_x = U_x \times T_x$ qui ne coupe pas la caustique. En particulier, cela signifie que la 1-forme α considérée n'est pas dégénérée en restriction au voisinage Ω_x . Sans perte de généralités, nous pouvons supposer que Ω_x est une carte feuilletante régulière (relativement compacte). Pour simplifier, nous notons dans la suite $\Omega_x = \Omega = U \times T$ en ometant la dépendance par rapport à x .

Le résultat de densité (théorème 3.1.3) de *M. Pozniak* cité précédemment nous permet d'affirmer que sur chaque plaque compacte du type $\overline{U} \times \{t\}$, il existe un ensemble dense de bonne métrique parmi les métriques restreintes à cette plaque. La notion de bonne métrique étant toujours prise pour la forme $\alpha_U = df_U$.

Par rapport au cas classique, le problème est de recoller transversalement les métriques approchées pour obtenir une bonne métrique sur toute la variété. L'idée est de traiter le problème localement puis de démontrer la densité globalement grâce au théorème de Baire. Nous allons commencer par déformer la métrique g afin d'obtenir une métrique arbitrairement proche de g et qui est une bonne métrique sur toute la variété.

Nous notons dans toute la suite g la métrique Riemannienne fixée sur la variété.

3.2.1 Densité des bonnes métriques localement

Dans cette section, nous nous plaçons sur l'ouvert $\Omega = U \times T$. Nous munissons cet ensemble de la métrique induite g_Ω que nous noterons simplement g .

Fixons $\varepsilon_1 > 0$ et posons $x = (u_0; t_0)$. Par restriction, $g_0 = g|_{\overline{U} \times \{t_0\}}$ définit une métrique sur $\overline{U} \times \{t_0\}$. Le résultat de densité de Pozniak nous permet d'affirmer que l'on peut approcher cette métrique par une bonne métrique \tilde{g}_0 sur $\overline{U} \times \{t_0\}$. En particulier, il existe \tilde{g}_0 telle que :

$$\|\tilde{g}_0 - g_0\|_{g|_{\overline{U} \times \{t_0\}}} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

C'est-à-dire telle que :

$$\forall u \in \overline{U} \quad \|\tilde{g}_{(u,t_0)} - g_{(u,t_0)}\| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

D'autre part, la métrique étant continue par rapport au point sur la variété, elle est continue dans le sens transverse et il existe un voisinage ouvert T_0 de t_0 tel que :

$$\forall (t, \tilde{t}) \in T_0, \quad \forall u \in \overline{U}, \quad \|g_{(u,t)} - g_{(u,\tilde{t})}\| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Considérons alors un ouvert V_0 de T_0 contenant t_0 et tel que :

$$V_0 \subset \overline{V_0} \subset T_0$$

On définit la fonction φ de classe \mathcal{C}^∞ comme la fonction à support dans $\overline{T_0}$ et égale à 1 sur $\overline{V_0}$. Posons alors :

$$\tilde{g} = \varphi \tilde{g}_0 + (1 - \varphi) g$$

Plus précisément, cela signifie que :

$$\forall (u, t) \in U \times T \quad \tilde{g}_{(u,t)} = \varphi(t) \tilde{g}_{(u,t_0)} + (1 - \varphi(t)) g_{(u,t)}$$

Il est clair que \tilde{g} définit une métrique sur Ω . De plus, comme $g = \varphi g + (1 - \varphi) g$, on a :

$$\|\tilde{g} - g\| = \|\varphi \tilde{g}_0 - \varphi g\|_{|U \times T_0}$$

Rappelons que :

$$\|\tilde{g} - g\|_{|U \times T_0} = \sup_{(u,t) \in U \times \overline{T_0}} \|\varphi(t) \tilde{g}_{(u,t_0)} - \varphi(t) g_{(u,t)}\|$$

Ainsi par définition de φ :

$$\|\tilde{g} - g\| \leq \sup_{(u,t) \in U \times \overline{T_0}} \|\tilde{g}_{(u,t_0)} - g_{(u,t)}\|$$

Mais nous avons :

$$\|\tilde{g}_{(u,t_0)} - g_{(u,t)}\| \leq \|\tilde{g}_{(u,t_0)} - g_{(u,t_0)}\| + \|g_{(u,t_0)} - g_{(u,t)}\|$$

donc nous obtenons :

$$\forall (u, t) \in U \times T_0 \quad \|g_{(u,t_0)} - g_{(u,t)}\| \leq \varepsilon_1$$

On en conclut que :

$$\|\tilde{g} - g\| \leq \varepsilon_1$$

La métrique \tilde{g} est donc une métrique sur Ω , arbitrairement proche de g , égale à g en dehors de $U \times T_0$ et qui est une bonne métrique en restriction à $U \times \{t_0\}$ (et même en restriction à $\overline{U} \times \{t_0\}$). Nous allons démontrer qu'il existe un voisinage transverse de t_0 tel que pour tout t dans ce voisinage, la métrique \tilde{g} est une bonne métrique sur $U \times \{t\}$. Remarquons que \tilde{g} est même définie sur $\overline{\Omega}$.

3.2.1.1 Bonne métrique dans un « voisinage » transverse

Notons dans la suite $\widetilde{G}_0 = X_g^\alpha$ le champ défini comme le dual de la 1-forme α pour la nouvelle métrique \tilde{g} . Nous venons de démontrer que ce champ est transverse sur $\overline{U} \times \{t_0\}$.

Dans tout ce qui suit, nous restreignons l'étude à $\overline{U} \times \overline{V_0}$, l'ensemble sur lequel $\tilde{g} = \tilde{g}_0$. Rappelons que l'on a pour tout point (u, t) :

$$\forall \nu \in T_{(u,t)}(\overline{U} \times \{t\}) \quad \tilde{g}_0(\widetilde{G}_0(u, t), \nu) = df(u, t) \cdot \nu$$

Par définition, la métrique \tilde{g}_0 est continue par rapport au point sur la variété et par hypothèse, l'application f est de classe \mathcal{C}^2 , on en déduit que le champ \widetilde{G}_0 est continu. Cela signifie que l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (u, t) \in \overline{U} \times \overline{V_0}, \exists U_{u,t}(\varepsilon) \times T_{u,t}(\varepsilon) \subset \overline{U} \times \overline{V_0}, \forall (\tilde{u}, \tilde{t}) \in U_{u,t}(\varepsilon) \times T_{u,t}(\varepsilon) \\ \|\widetilde{G}_0(u, t) - \widetilde{G}_0(\tilde{u}, \tilde{t})\| \leq \varepsilon$$

Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et écrivons la définition de la continuité du champ pour un point $(u, t_0) \in \overline{U} \times \{t_0\}$ fixé :

$$\exists U_{u,t_0}(\varepsilon) \times T_{u,t_0}(\varepsilon) \subset \overline{U} \times \overline{V_0}, \forall (\tilde{u}, \tilde{t}) \in U_{u,t_0}(\varepsilon) \times T_{u,t_0}(\varepsilon), \|\widetilde{G}_0(u, t_0) - \widetilde{G}_0(\tilde{u}, \tilde{t})\| \leq \varepsilon$$

Considérons alors un recouvrement de \overline{U} par les ouverts $U_{u,t_0}(\varepsilon)$ qui apparaissent dans la définition précédente. Par compacité de \overline{U} , nous pouvons en extraire un recouvrement fini :

$$\overline{U} \subset \bigcup_{k \in [1;m]} U_{u_k, t_0}(\varepsilon)$$

Posons alors :

$$T_0(\varepsilon) = \bigcap_{k \in [1;n]} T_{u_k, t_0}(\varepsilon)$$

On obtient ainsi un voisinage de t_0 dans V_0 vérifiant :

$$\forall (\tilde{u}, \tilde{t}) \in \overline{U} \times T_0(\varepsilon) \quad \left\| \widetilde{G}_0(u, t_0) - \widetilde{G}_0(\tilde{u}, \tilde{t}) \right\| \leq \varepsilon$$

Cela revient finalement à dire que le champ est uniformément continu transversalement sur $\overline{U} \times \overline{V}_0$.

Posons $G_t(u, t_0) = \widetilde{G}_0(u, t)$. Le caractère ouvert de la condition de transversalité plaque à plaque nous permet d'affirmer qu'une perturbation suffisamment petite du champ permet de conserver l'hypothèse de transversalité. En particulier, comme le champ \widetilde{G}_0 est transverse sur $\overline{U} \times \{t_0\}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que tout champ de gradient sur $\overline{U} \times \{t_0\}$ vérifiant $\left\| \widetilde{G}_0 - X \right\| \leq \varepsilon_0$ est encore transverse. Or d'après ce que nous venons de voir, pour tout $t \in \overline{U} \times T_0(\varepsilon_0)$, nous avons :

$$\forall (u, \tilde{u}) \in \overline{U} \quad \left\| G_0(u, t_0) - \widetilde{G}_0(\tilde{u}, t) \right\| \leq \varepsilon_0$$

Cela implique que :

$$\forall (u, \tilde{u}) \in \overline{U} \quad \left\| \widetilde{G}_0(u, t_0) - G_t(\tilde{u}, t_0) \right\| \leq \varepsilon_0$$

Cela peut encore s'écrire :

$$\left\| \widetilde{G}_0 - G_t \right\|_{\overline{U} \times \{t_0\}} \leq \varepsilon_0$$

On en déduit donc que le champ \widetilde{G}_t est transverse sur $\overline{U} \times \{t_0\}$, ce qui revient à dire que le champ \widetilde{G}_0 est transverse sur $\overline{U} \times \{t\}$. Finalement, cela signifie que le champ \widetilde{G}_0 est transverse sur $\overline{U} \times T_0(\varepsilon_0)$ (plaques à plaques).

Nous venons donc de prouver que la métrique que nous avons construite dans la partie précédente est une bonne métrique sur un voisinage transverse $T_0(\varepsilon_0)$ de t_0 , ce que nous cherchions à démontrer. Pour des raisons pratiques, nous aurons besoin d'avoir un voisinage compact. Nous choisissons donc un voisinage ouvert T_{t_0} de t_0 tel que $T_{t_0} \subset \overline{T_{t_0}} \subset T_0(\varepsilon_0)$.

La métrique \tilde{g} est définie uniquement sur Ω . Pour obtenir une métrique sur la variété M tout entière, il faut choisir U_0 ouvert dans U tel que $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$ et définir $\tilde{\tilde{g}}$ comme

la métrique $\psi\tilde{g}_0 + (1-\psi)\tilde{g}$. où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à valeurs dans $[0; 1]$ égale à 1 dans $\overline{U_0} \times \overline{T_{t_0}}$. Finalement, la métrique \tilde{g} est une métrique sur M arbitrairement proche de g et qui est une bonne métrique sur un voisinage $\overline{\Omega_0} = \overline{U_0} \times \overline{T_0}$ de $x = (u_0; t_0)$. Nous résumons ce résultat sous forme d'une propriété.

Proposition 3.2.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x_0 = (u_0; t_0) \in \overline{\Omega}$, il existe une métrique g_0 définie sur M et des ouverts $U_0 \subset U$ et $T_0 \subset T$ avec $U_0 \times T_0$ un voisinage de x_0 et tels que l'on ait :*

- $\|\tilde{g}_0 - g\| \leq \varepsilon$;
- $\forall t \in \overline{T_0} \quad \tilde{g}_0|_{\overline{U_0} \times \{t\}}$ est une bonne métrique (i.e. : \tilde{g}_0 bonne métrique sur $\overline{U_0} \times \overline{T_0}$).

Pour obtenir un résultat de densité des bonnes métriques sur la variété M tout entière, nous devons d'abord démontrer qu'il s'agit d'une condition ouverte.

3.2.1.2 Le caractère ouvert transversalement de la condition de transversalité pour les métriques

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.2.2 *Soit g_1, g_2 deux métriques définies sur $\overline{\Omega} = \overline{U} \times \overline{T}$. Supposons que g_1 soit une bonne métrique sur $\overline{U_1} \times \overline{T_1} \subset \overline{U} \times \overline{T}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \Rightarrow g_2 \text{ bonne métrique sur } \overline{U} \times \overline{T_1}$$

Preuve de la proposition 3.2.2 : Notons $X_1 = (G_1, 0)$ respectivement $X_2 = (G_2, 0)$ le champ dual de la forme α associé à la métrique g_1 respectivement à la métrique g_2 . Supposons que g_1 est une bonne métrique sur $\overline{U_1} \times \overline{T_1}$. Pour chaque $t \in \overline{T_1}$, le champ associé G_1 est transverse sur $\overline{U} \times \{t\}$. D'après la section précédente, la transversalité est une condition ouverte transversalement pour le champ. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon(t)$ et un voisinage T_t tel que tout champ de gradient sur $\overline{U_1} \times \overline{T}$ vérifiant $\|\tilde{G}_0 - X\| \leq \varepsilon(t)$ est transverse sur $\overline{U_1} \times T_t$. On obtient ainsi un recouvrement de \overline{T} :

$$\overline{T} \subset \bigcup_{t \in \overline{T}} T_t$$

dont on peut extraire un recouvrement fini par compacité de \overline{T} que l'on note :

$$\overline{T} \subset \bigcup_{j \in [1; r]} T_{t_j}$$

On pose alors $\varepsilon_1 = \min_j \varepsilon(t_j)$. Cela signifie que tout champ de gradient sur $\overline{U} \times \overline{T}$ vérifiant $\|\tilde{G}_0 - X\| \leq \varepsilon_1$ est transverse sur $\overline{U_1} \times \overline{T_1}$.

D'après la propriété 2.3.2, le champ de gradient feuilleté dépend continûment de la métrique. Cela signifie donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|G_1 - G_2\| \leq \varepsilon_1$$

Mais cela implique alors que le champ G_2 est transverse sur $\overline{U}_1 \times \overline{T}_1$, soit encore que g_2 est une bonne métrique sur $\overline{U}_1 \times \overline{T}_1$. ■

Nous pouvons maintenant démontrer un premier résultat de densité pour les bonnes métriques.

3.2.1.3 Déformation de la métrique dans une carte locale

On fixe $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 3.2.1, nous pouvons associer à tout point x de $\overline{\Omega}$, un voisinage V_x avec de bonnes propriétés. Considérons un recouvrement de $\overline{\Omega}$ par de tels ouverts :

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} \Omega_x$$

Par compacité de $\overline{\Omega}$, on peut en extraire un recouvrement fini :

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j \in [1; m]} \overline{\Omega}_j$$

Définissons alors les ensembles :

$$A_j = \{g \in \mathcal{G} / g \text{ bonne métrique sur } \overline{\Omega}_j\}$$

où \mathcal{G} désigne l'ensemble des métriques Riemanniennes sur la variété M .

Si nous démontrons que chacun des ces ensembles est un ouvert dense, alors d'après le théorème de Baire (que nous pouvons appliquer car la variété M est de Baire), nous obtiendrons que l'ensemble $\bigcap_{j \geq 1} A_j$ est dense dans \mathcal{G} . Or par définition, on a :

$$\bigcap_{j \geq 1} A_j = \left\{ g \in \mathcal{G} / g \text{ bonne métrique sur } \bigcup_{j \in [1; m]} \overline{\Omega}_j \right\}$$

Cela signifie que toute métrique Riemannienne sur M peut être approchée par une bonne métrique sur Ω . Démontrons maintenant que A_j est un ouvert dense de \mathcal{G} .

– A_j est un ensemble dense dans \mathcal{G} :

Nous avons démontré que si nous considérons une métrique g sur Ω alors on peut l'approcher par une métrique \tilde{g}_j proche de g à ε près et telle que \tilde{g}_j soit une bonne métrique

sur $\bar{\Omega}_j$. Cela signifie exactement que toute métrique de \mathcal{G} peut être approchée par une métrique de A_j , ce qui revient à dire que A_j est dense dans \mathcal{G} . Remarquons que nous avons justement choisi les ensembles A_j pour que cette condition soit satisfaite.

– A_j est un ensemble ouvert dans \mathcal{G} :

Pour montrer que A_j est ouvert dans \mathcal{G} , il faut montrer que tout élément de A_j est contenu dans un ouvert de A_j . Donnons nous g_j un élément de A_j et fixons $\varepsilon > 0$. Considérons la boule ouverte $B_j(\varepsilon)$ de \mathcal{G} de centre g_j et de rayon ε , et prenons $g \in B_j(\varepsilon)$. Il nous suffit donc de montrer que $g \in A_j$, ou plus précisément que c'est le cas pour un certain ε . Par définition, nous avons :

$$\forall (u, t) \in U \times T \quad \|g_{j,(u,t)} - g_{(u,t)}\| \leq \varepsilon$$

Mais d'après la proposition 3.2.2, il existe ε tel que l'inégalité précédente implique que g est une bonne métrique sur $\bar{\Omega}_j$, ce qui signifie justement que $g \in A_j$. On en déduit que l'ensemble A_j est un ensemble ouvert dans \mathcal{G} .

On en conclut que l'ensemble $\bigcap_{j \geq 1} A_j$ est dense dans \mathcal{G} et cela signifie exactement que toute métrique Riemannienne sur M peut être approchée par une bonne métrique en restriction à Ω .

3.2.2 Densité des bonnes métriques globalement

Nous avons fait à présent la partie du travail la plus importante. Nous venons de démontrer qu'à tout point x de M qui n'est pas un point critique dégénéré, on peut associer une carte feuilletante Ω_x sur laquelle il existe un ensemble dense de bonnes métriques parmi les métriques Riemanniennes restreintes à cette carte.

Pour tout n un entier naturel, définissons l'ensemble suivant :

$$A_n = \{x \in M / d_{Agmon}(x; \Gamma) \geq \frac{1}{n}\}$$

L'ensemble Γ étant fermé, cet ensemble est une sous-variété fermée de M donc compacte. Les éléments de A_n n'étant pas des points critiques dégénérés, nous avons un recouvrement de cet ensemble par les cartes Ω_x :

$$A_n \subseteq \bigcup_{x \in A_n} \Omega_x$$

La compacité de A_n nous permet d'en extraire un recouvrement fini :

$$A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^r \Omega_{x_i}$$

En utilisant une nouvelle fois le théorème de Baire, nous pouvons démontrer qu'il existe un ensemble dense de bonnes métriques parmi les métriques Riemanniennes restreintes à A_n . Nous posons ainsi :

$$\mathcal{G}_n = \{g \in \mathcal{G} / g|_{A_n} \text{ est une bonne métrique}\}$$

Par définition, cet ensemble est un ouvert dense de \mathcal{G} . D'après le théorème de Baire, cela implique que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ est un ouvert dense de \mathcal{G} . Or par construction, nous avons justement :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n = \{g \in \mathcal{G} / g|_{M-\Gamma} \text{ est une bonne métrique}\}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *L'ensemble des bonnes métriques sur $M - \Gamma$ est dense parmi l'ensemble des métriques riemanniennes sur M .*

Il est donc possible d'approcher toute métrique sur M par une métrique vérifiant la condition de transversalité sauf éventuellement sur la caustique Γ . Cette hypothèse est cruciale pour construire le complexe d'orientation.

Nous allons maintenant démontrer qu'il est possible de déformer la métrique de sorte à avoir à la fois l'hypothèse de transversalité feuille à feuille et la métrique plate dans un voisinage tubulaire de la variété critique. Cette fois, nous ne montrerons pas directement qu'il existe un ensemble dense de telles métriques mais simplement que toute métrique peut être approchée par une métrique adaptée sur un ensemble qui dépend de la métrique initiale. Cette dépendance nous empêche d'affirmer l'existence d'un ensemble dense même si cela semble être le cas.

3.3 Déformation de la métrique adaptée au cas feuilleté

Dans le chapitre 2, nous avons construit une métrique qui est plate dans un voisinage tubulaire $N_{2,\delta}^\varepsilon$ de l'ensemble $C_\varepsilon = \Sigma \setminus \Gamma_\varepsilon$ la variété critique privée d'un voisinage Γ_ε de la caustique. Nous avons aussi une forme particulière de la fonction dans ce même voisinage. Rappelons que :

$$N_{2,\delta}^\varepsilon = \{x \in M / d_{Agmon}(x, C_\varepsilon) \leq \delta\}$$

Rappelons aussi que Γ_ε est un voisinage ouvert de la caustique Γ (que l'on peut aussi supposer de mesure transverse $\Lambda(\Gamma) \leq \varepsilon$). Pour simplifier, nous omettrons la référence à ε dans la suite de cette section.

Notons \mathcal{G}_δ l'ensemble des métriques qui sont plates en restriction au voisinage $N_{2,\delta}$. Remarquons au passage que pour tout $\beta \leq \delta$, nous avons $\mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{G}_\beta$. Dans la suite, nous

identifierons parfois l'ensemble \mathcal{G}_δ et l'ensemble des métriques possédant la même propriétés mais définies sur $M - \Gamma$.

Notre problème est alors le suivant : est-il possible de trouver un ensemble de métriques \mathcal{G}_0 dense dans \mathcal{G}_δ et constitué uniquement de bonnes métriques, c'est-à-dire de métriques telles que le champ de gradient feuilleté soit transverse feuille à feuille ? Nous allons voir qu'il est possible de démontrer un résultat analogue.

Théorème 3.3.1 *Toute métrique $g \in \mathcal{G}_\delta$ peut être approchée par une métrique $\tilde{g} \in \mathcal{G}_{\frac{\delta}{2}}$ qui est une bonne métrique sur $M - \Gamma$. En particulier, nous avons pour la métrique modifiée :*

$$\forall x, y \in \Sigma \setminus \Gamma \quad W^u(x) \text{ et } W^s(y) \text{ se coupent transversalement}$$

Exposons tout d'abord le principe de la démonstration. Considérons une métrique $g \in \mathcal{G}$ qui est la métrique plate dans le voisinage $N_{2, \frac{\delta}{2}}$. Nous pouvons déformer cette métrique en dehors du voisinage $N_{2, \delta}$ de sorte à obtenir une bonne métrique. Dans $N_{\frac{\delta}{2}}$, le champ est automatiquement transverse puisque nous connaissons explicitement la forme de ce dernier. Nous voyons donc que le problème se situe uniquement au niveau de la zone de recollement des métriques c'est-à-dire dans $N_{2, \delta} \setminus N_{2, \frac{\delta}{2}}$. Nous allons alors démontrer que si la déformation des métriques est suffisamment petite, la condition de transversalité est encore vérifiée dans la zone de recollement.

Preuve du Théorème 3.3.1 : On note g_δ la métrique associée au voisinage tubulaire feuilleté $N_{2, \delta}$ (voir section 2.2.3). Par construction, cette métrique est la métrique plate dans le voisinage tubulaire $N_{2, \delta}$. De plus, d'après la proposition 2.2.2, la restriction de $N_{2, \delta}$ à une feuille est une réunion disjointe de boules centrées en un point critique et de rayon δ .

D'après le théorème 3.2.1 et par restriction, il existe un ensemble dense de métriques parmi les métriques riemanniennes qui sont des bonnes métriques sur $(M \setminus \Gamma) \setminus N_{2, \delta}^\circ$. En particulier, pour tout $r > 0$, on peut trouver une bonne métrique \tilde{g}_r sur $(M \setminus \Gamma) \setminus N_{2, \delta}^\circ$ telle que l'on ait :

$$\left\| g_{\delta|(M \setminus \Gamma) \setminus N_{2, \delta}^\circ} - \tilde{g}_r \right\| \leq r$$

Soit $\beta > 0$ tel que $\beta < \delta$. Considérons une fonction φ de classe \mathcal{C}^∞ à valeurs dans $[0; 1]$ vérifiant :

$$\varphi_\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M \setminus N_{2, \delta}^\circ \\ 1 & \text{si } x \in N_{2, \beta} \end{cases}$$

Définissons alors une métrique sur toute la variété en posant :

$$\widetilde{g_{\delta, r, \beta}} = \varphi_\beta g_\delta + (1 - \varphi_\beta) \tilde{g}_r$$

Par construction, cette métrique vérifie les propriétés suivantes :

- $\widetilde{g_{\delta,r,\beta}}$ est une bonne métrique sur $(M \setminus \Gamma) \setminus N_{2,\delta}^\circ$;
- $\widetilde{g_{\delta,r,\beta}}$ est la métrique plate dans $N_{2,\beta}$;
- $\|g_\delta - \widetilde{g_{\delta,r,\beta}}\| \leq r$.

Comme nous l'avons déjà précisé, nous connaissons la forme du champ à l'intérieur de $N_{2,\beta}$. Il s'agit d'un flot linéaire classique. Ce champ est donc automatiquement transverse en tout point de $N_{2,\beta}$.

Le seul problème se situe finalement entre $N_{2,\delta}$ et $N_{2,\beta}$, là où nous n'avons aucun contrôle de la métrique modifiée. Si β tend vers δ , nous voyons bien que la condition de transversalité sera vérifiée partout. Cependant, nous ne pouvons pas conclure si rapidement car la limite de la métrique $\widetilde{g_{\delta,r}}$ lorsque $\beta \rightarrow \delta$ n'est pas forcément une métrique.

D'après la proposition 3.2.2, la condition de transversalité est une condition ouverte pour les métriques en restriction à des cartes locales. Nous en déduisons un résultat équivalent adapté aux voisinages tubulaires de la variété C_ε .

Proposition 3.3.1 *Soit g_1, g_2 deux métriques définies sur M . Supposons que g_1 soit une bonne métrique sur $N_{2,\beta}$ avec $(0 < \beta \leq \delta)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \Rightarrow g_2 \text{ bonne métrique sur } N_{2,\beta}$$

Preuve de la Proposition 3.3.1 : Soit g_1, g_2 deux métriques définies sur M telles que g_1 soit une bonne métrique sur $N_{2,\beta}$. L'ensemble $N_{2,\beta}$ est un compact de M et on peut donc le recouvrir par un nombre fini de cartes feuilletantes $\Omega_i = U_i \times T_i$. La proposition 3.2.2 nous permet de trouver pour chaque i des nombres ε_i tels que :

$$\|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon_i \Rightarrow g_2 \text{ bonne métrique sur } N_{2,\beta} \cap \Omega_i$$

Posons alors $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$, on obtient :

$$\|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \Rightarrow g_2 \text{ bonne métrique sur } N_{2,\beta}$$

Le résultat est donc démontré. ■

Par définition, la métrique initiale est la métrique plate dans $N_{2,\delta}$ et la forme locale de la fonction nous permet d'affirmer qu'il s'agit d'une bonne métrique sur $N_{2,\delta}$. La proposition 3.3.1 appliquée à cette métrique nous donne l'existence d'un réel $\varepsilon_\delta > 0$ tel que :

$$\|g_\delta - g\| \leq \varepsilon_\delta \Rightarrow g \text{ bonne métrique sur } N_{2,\delta}$$

Considérons maintenant la métrique $\widetilde{g_{\delta,\varepsilon_\delta,\frac{\delta}{2}}}$; cela correspond à la métrique $\widetilde{g_{\delta,\varepsilon_\delta,\beta}}$ pour $\beta = \frac{\delta}{2}$. Par construction, cette métrique est une métrique riemannienne définie sur toute la variété et vérifiant :

- $\widetilde{g_{\delta,r,\beta}}$ est une bonne métrique sur $(M \setminus \Gamma) \setminus N_{2,\delta}^\circ$;

- $\widetilde{g_{\delta, r, \frac{\delta}{2}}}$ est la métrique plate sur $N_{\frac{\delta}{2}}$;
- $\left\| g_{\delta} - \widetilde{g_{\delta, r, \frac{\delta}{2}}} \right\| \leq \varepsilon_{\delta}$.

Or d'après le choix de ε_{δ} , la dernière inégalité signifie que $\widetilde{g_{\delta, \varepsilon_{\delta}, \frac{\delta}{2}}}$ est une bonne métrique sur $N_{2, \delta}$. Finalement, les trois conditions signifient que la métrique $\widetilde{g_{\delta, \varepsilon_{\delta}, \frac{\delta}{2}}}$ est une bonne métrique sur toute la variété $M \setminus \Gamma$. Comme de plus, cette métrique est arbitrairement proche de la métrique initiale et est la métrique plate dans un voisinage tubulaire de la variété critique C_{ε} , cela achève la preuve du Théorème 3.3.1. ■

Ce résultat nous permet ainsi d'avoir à la fois l'hypothèse de transversalité et la forme normale localement de la fonction et du champ de gradient associé. A partir de maintenant et dans toute la suite, nous munissons M d'une telle métrique que nous notons encore g .

3.4 Propriétés des trajectoires pour une bonne métrique

En combinant les premières propriétés obtenues sur les trajectoires (Cf. section 2.3.4) et l'hypothèse de transversalité du champ, nous pouvons obtenir de nouvelles informations sur les trajectoires. Pour simplifier, nous dirons parfois que deux points critiques x, y sur la même feuille sont d'indices voisins si la différence de leurs indices est égale à 1. Par convention, nous supposons que $\text{ind}(y) \geq \text{ind}(x)$.

3.4.1 Finitude du nombre de trajectoires entre deux points

La métrique considérée est telle que la condition de transversalité du champ est satisfaite pour tout couple de points critiques n'appartenant pas à une feuille critique. Le champ de gradient feuilleté est donc localement un champ de Morse Smale en restriction à chaque feuille non critique.

Soit x et y des points critiques non dégénérés. L'hypothèse de transversalité nous permet d'obtenir que :

$$\dim \mathcal{M}(x, y) = \text{ind}(y) - \text{ind}(x)$$

.

Remarque 3.4.1 Cela implique en particulier que $\mathcal{M}(x, y) \neq \emptyset$ si et seulement si $\text{ind}(y) > \text{ind}(x)$.

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.4.1 *Si x et y sont deux points critiques de Morse d'indices q et $q + 1$ alors il y a au plus un nombre fini de trajectoires reliant ces deux points.*

Preuve : Soit x, y deux points d'indices q et $q + 1$ alors $\text{ind}(y) = \text{ind}(x) + 1$. Comme dans la section 2.3.3, nous notons $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ l'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ à reparamétrisation près. Cette variété est de dimension 0 et il s'agit donc d'un ensemble discret.

L'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ peut être vu comme une sous-variété de la variété globale M . En particulier, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ peut être vu comme une sous-variété discrète de M qui est compacte, il s'agit donc d'un ensemble fini. ■

Remarque 3.4.2 *Remarquons que la finitude de cet espace est valable pour un couple (x, y) fixé. Le cardinal de cet ensemble dépend donc du couple choisi.*

3.4.2 Borne uniforme pour le nombre de trajectoires reliant deux points critiques d'indices voisins

D'après la proposition 3.4.1, le nombre de trajectoires reliant deux points critiques est borné pour chaque couple de points critiques. Nous allons maintenant démontrer qu'il est possible de trouver une borne uniforme indépendante des feuilles et valable pour Λ -presque toute feuilles.

Considérons un point critique $x \in C^q$ n'appartenant pas à une feuille dégénérée et $\Omega = U \times T$ une carte feuilletante contenant x . On considère aussi le voisinage tubulaire feuilleté N_δ^q de la variété critique C^q défini par :

$$N_\delta^q = \{z \in M / d_{\text{Agmon}}(z, C^q) \leq \delta\}$$

En fait, nous n'allons pas majorer directement le nombre de trajectoires reliant deux points critiques d'indices voisins. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.4.2 *Le nombre de trajectoires partant d'un point critique d'indice q et arrivant en des points critiques d'indices $q + 1$ est uniformément borné par une constante indépendante des feuilles et du point critique de départ.*

En particulier, la borne obtenue pour cette proposition est encore valable pour deux points critiques d'indices q et $q + 1$ fixés.

Preuve de la proposition 3.4.2 : On commence par introduire la notation suivante.

Notations 3.4.1 On pose $m_x = \sum_{y \in C^{q+1}} \#\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$

Le nombre m_x correspond au nombre de trajectoire partant du point x et arrivant en un point critique d'indice $q+1$. Les résultats des sections précédentes vont nous permettre de vérifier que ce nombre est bien défini.

Lemme 3.4.1 $m_x < \infty$

Preuve : Nous avons démontré les deux résultats suivants :

- d'après la proposition 2.3.1, l'ensemble $\{y \in C^{q+1} / \#\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \neq \emptyset\}$ est fini ;
- d'après la proposition 3.4.1, $\#\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) < \infty$ pour tout couple de points critiques $(x, y) \in C^q \times C^{q+1}$.

En combinant ces deux affirmations, nous obtenons que $m_x < \infty$. ■

Pour démontrer l'existence d'une borne uniforme, nous allons d'abord démontrer que le nombre de trajectoires partant de x est localement constant comme fonction de x . Soit V_0 un voisinage ouvert de x dans la variété critique C^q contenu dans Ω . D'après la proposition 2.2.2, il existe un réel $\tilde{\delta}$ tel que tous les points critiques de V_0 sont contenus dans une boule de rayon $\tilde{\delta}$ centrée en ce point et ne contenant aucun autre point critique.

Quitte à réduire le voisinage V_0 , nous pouvons supposer que pour tout $t \in T$, le nombre de points de V_0 sur chaque plaque est au plus égal à 1. En projetant l'ensemble V_0 sur la transversale, nous obtenons un sous ensemble T_0 de T tel que $t \in T_0$:

$$V_0 \cap P_t = \{x_t\}$$

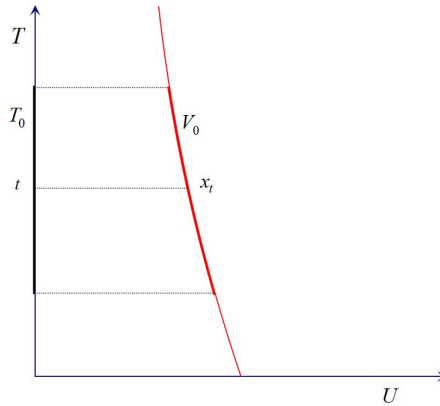


FIG. 3.1 – V_0 et T_0

Remarquons qu'il y a une bijection naturelle entre T_0 et V_0 . Enfin, sans perte de généralités, nous pouvons supposer que le système de coordonnées choisi est centré au point x , de sorte que P_0 désigne la plaque contenant x .

Considérons maintenant l'ensemble des points z qui sont les premiers points de sortie de $N_{\tilde{\delta}}$ des trajectoires du champ de gradient d'origine un point de V_0 et d'extrémité un point de C^{q+1} :

$$K(T_0) = \{z \in W^u(V_0) \cap W^s(C^{q+1}) \cap \partial N_{\tilde{\delta}} / z = \gamma(s_0) \\ \text{avec } s_0 = \sup\{s \in \mathbb{R} / \gamma(] - \infty; s[) \subset N_{\tilde{\delta}}\}$$

Par définition de $\tilde{\delta}$, nous sommes assurés que toute trajectoire partant d'un point critique x et aboutissant en un point d'indice $q + 1$ doit sortir de $N_{\tilde{\delta}}$. Le réel s_0 est donc bien défini et l'ensemble $K(T_0)$ aussi. Cet ensemble est une variété transverse au feuilletage. Remarquons qu'en posant $z = \gamma(s_0)$, nous avons forcément $z \in \partial N_{\tilde{\delta}}$.

D'après le choix du voisinage V_0 et donc de T_0 , pour tout $t \in T_0$, l'ensemble $V_0 \cap P_t$ est réduit au seul point x_t . De plus, par définition de $K(T_0)$, toute trajectoire passant par un point de $K(T_0) \cap P_t$ part d'un point de $V_0 \cap P_t$, unique et fixé par la valeur du paramètre transverse t . En particulier, $K(T_0) \cap P_t$ est un nombre fini de point. En effet, il y a une bijection naturelle entre les trajectoires de $W^s(x_t) \cap W^u(C^{q+1})$ et les points de $K(T_0) \cap P_t$ puisque chaque point de $K(T_0) \cap P_t$ définit une unique trajectoire reliant un point de C^{q+1} au point x_t . L'ensemble $K(T_0) \cap P_t$ contient donc m_{x_t} éléments et d'après le lemme 3.4.1, ce nombre est fini. Notons que nous avons en particulier l'égalité suivante pour tout $t \in T_0$:

$$K(T_0) \cap P_t = \{z \in W^u(V_0 \cap P_t) \cap W^s(C^{q+1}) \cap \partial N_{\tilde{\delta}} / z = \gamma(s_0) \\ \text{avec } s_0 = \sup\{s \in \mathbb{R} / \gamma(] - \infty; s[) \subset N_{\tilde{\delta}}\}$$

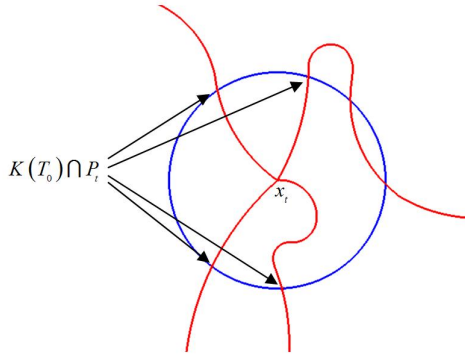


FIG. 3.2 – L'ensemble $K(T_0) \cap P_t$

Considérons maintenant l'application définie sur T_0 qui à tout élément $t \in T_0$ associe l'ensemble $W^s(V_0 \cap P_t)$, soit encore $W^s(x_t)$. Comme la variété instable ne dépend que de la fonction f qui est de classe \mathcal{C}^2 par rapport au paramètre transverse, et du point x_t en lequel on la considère qui est aussi continue comme fonction du paramètre transverse, nous pouvons donc en déduire que l'application $t \rightarrow W^s(x_t)$ est continue par rapport à t . Mais d'après l'égalité précédente, cela signifie que l'ensemble $K(T_0) \cap P_t$ dépend continûment du paramètre transverse t .

Pour tout $t \in T_0$, l'ensemble $K(T_0) \cap P_t$ est un ensemble fini. C'est donc le cas en particulier pour $t = 0$ et le cardinal de cet ensemble est alors m_x . La continuité par rapport au paramètre t nous permet d'affirmer l'existence d'un petit voisinage T_1 de 0 dans T_0 tel que pour tout t dans ce voisinage, on ait $\#(K(T_0) \cap P_t) = m_x$. Soit V_1 le voisinage de x dans C^q associé à T_1 , nous obtenons :

$$\forall z \in V_1 \quad m_z = m_x$$

Cela revient à dire que la fonction $x \rightarrow m_x$ est localement constante.

Remarquons que m_x vu comme une fonction de x est une fonction à valeurs entières. Or nous savons qu'une fonction localement constante et à valeur entières est constante sur les composantes connexes de la variété. Pour démontrer l'existence d'une borne uniforme pour m_x , il suffit de démontrer que la variété critique $\Sigma \setminus \Gamma$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes ou, ce qui revient au même, que chaque C^q n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

A priori, la variété C^q possède une infinité dénombrable de composantes connexes. Nous savons que l'ensemble C^q est une variété ouverte dans Σ , de dimension q et transverse au feuilletage. De plus, la variété M étant compacte, nous pouvons la recouvrir par un nombre fini de cartes feuilletantes. Il suffit donc de démontrer que pour chaque carte $\Omega = U \times T$ avec U et T connexes, $C^q \cap \Omega$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Plus précisément, nous pouvons recouvrir la variété M par un nombre fini de cartes de Morse ou de naissance-mort.

Fixons une carte feuilletante $\Omega = U \times T$ de Morse ou de naissance-mort que nous pouvons supposer de la forme $] - 1; 1[^p \times] - 1; 1[^{n-p}$. Dans une telle carte, nous avons une forme normale pour la fonction. En calculant le gradient de la fonction pour la métrique plate, nous obtenons une forme explicite de l'ensemble $C^q \cap \Omega$. Sans entrer dans les détails des calculs, on vérifie facilement que :

- $C^q \cap \Omega = \{(0; t) \in \Omega / t \in] - 1; 1[^{n-p}\}$ dans une carte de Morse ;
- $C^q \cap \Omega = \{(\sqrt{t_1}, 0, \dots, 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \in U \times T / t_1 \in]0; 1[, (t_2, \dots, t_{n-p}) \in] - 1; 1[^{n-p-1}\}$ dans une carte de naissance-mort.

Ces formes explicites nous permettent alors d'affirmer que $C^q \cap \Omega$ est connexe puisqu'il s'agit d'ensembles connexes par arcs. Remarquons que la métrique considérée n'est pas la métrique plate dans les cartes de type naissance-mort mais la connexité ne dépend pas de la métrique.

L'intersection de C^q avec toute carte feuilletante de Morse ou de naissance-mort nous donne une partie connexe de C^q . La finitude du nombre de cartes nous permet alors d'assurer la finitude du nombre de composantes connexes de C^q . Notons maintenant r^q le nombre de composantes connexes de C^q , nous pouvons définir β^q comme le maximum des valeurs de m_x lorsque x décrit chacune des composantes connexes. Nous obtenons un nombre fini qui majore le nombre de trajectoires partant de n'importe quel point x de C^q et arrivant dans C^{q+1} .

Pour conclure, il suffit de poser :

$$\beta = \sup_{0 \leq q \leq p} \beta^q$$

Nous obtenons ainsi un majorant pour le nombre de trajectoires partant d'un point critique x n'appartenant pas à une feuille critique et arrivant en un point d'indice $q + 1$, ce qui achève la preuve du résultat. ■

Chapitre 4

Le complexe d'orientation

Nous connaissons maintenant les propriétés essentielles du champ de gradient feuilleté et des trajectoires associées à ce champ, ce qui va suivre va nous permettre de construire un complexe particulier défini sur la variété feuilletée. Il s'agit de l'analogue du complexe d'orientation dans le cas classique. Nous le désignerons donc sous le nom de complexe d'orientation feuilleté.

Dans un premier temps, nous détaillons le principe de la construction du complexe d'orientation dans le cas classique et nous calculerons ce complexe sur des exemples simples. Nous indiquerons le procédé formel pour pouvoir calculer la contribution d'une courbe reliant deux points critiques en comparant deux orientations. Puis, nous expliquerons comment adapter cette construction au cas feuilleté. Nous verrons alors l'importance des différents résultats que nous avons démontrés sur les trajectoires.

4.1 Construction du complexe d'orientation dans le cas classique

Nous considérons dans toute la suite une variété L compacte de dimension p et nous notons f une fonction de Morse sur (toute) cette variété. La compacité de la variété nous permet d'affirmer que le nombre c_k de points critiques d'indice k de la fonction est fini.

Le complexe d'orientation est un complexe de la forme :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{c_0} \xrightarrow{d^0} \mathbb{C}^{c_1} \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathbb{C}^{c_p} \xrightarrow{d^{n-1}} 0$$

Les espaces \mathbb{C}^{c_q} étant de dimensions finies, l'opérateur $d^q : \mathbb{C}^{c_q} \rightarrow \mathbb{C}^{c_{q+1}}$ associé à chaque flèche peut être représenté par une matrice qu'il nous suffira de déterminer pour définir complètement le complexe d'orientation. La construction du complexe d'orientation repose donc sur la manière de définir les coefficients de la matrice représentant l'opérateur d'orientation dans des bases adaptées.

Le problème principal de cette construction est le suivant : la comparaison de deux orientations a une définition naturelle sur des variétés orientables, il n'en est plus de même sur des variétés non orientables. Nous allons voir que même si la variété n'est pas orientable, nous pouvons donner un sens à cette notion.

Comme nous ne supposons pas L orientable, nous avons besoin de la théorie du transport parallèle pour définir le complexe d'orientation.

4.1.1 Résultats préliminaires

Nous allons utiliser la théorie du transport parallèle pour comparer des orientations dans le cas de variétés non orientables a priori.

4.1.1.1 Orientation des variétés stables et instables

Intéressons nous au champ de gradient de la fonction f . On rappelle que les variétés stables et instables sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \left\{ y \in L / \exists \gamma, \dot{\gamma} = \text{grad} f(\gamma), \gamma(0) = y, \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = x \right\} \\ W^u(x) &= \left\{ y \in L / \exists \gamma, \dot{\gamma} = \text{grad} f(\gamma), \gamma(0) = y, \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = x \right\} \end{aligned}$$

Ce sont des sous-variété de L . En prenant la métrique induite sur chacune de ces variétés, on obtient des variétés Riemanniennes connexes et dénombrables à l'infini.

Fixons en chacun des points critiques x de f une orientation de $T_x W^s(x)$ et de $T_x W^u(x)$. Nous n'avons pas supposé que la variété ambiante était orientée. Rappelons qu'une orientation d'un espace vectoriel de dimension finie (> 0) est la donnée d'une base ordonnée, que nous appellerons dans la suite base orientée.

En chaque point critique, nous avons :

$$T_x W^s(x) \oplus T_x W^u(x) = T_x L$$

Nous obtenons ainsi une orientation induite de $T_x L$ en chaque point critique x . Plus précisément, chacune des orientations de $T_x W^s(x)$ et de $T_x W^u(x)$ est donnée respectivement par deux bases (e_1, \dots, e_p) et (f_1, \dots, f_{n-p}) . La base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_{n-p})$ nous donne alors une orientation de $T_x L$.

Finalement, nous fixons en tout point critique x une orientation cohérente des espaces tangents $T_x W^s(x)$, $T_x W^u(x)$ et $T_x L$.

4.1.1.2 Un peu de théorie du transport parallèle

La construction de l'opérateur d'orientation $d_k : \mathbb{C}^{c_k} \rightarrow \mathbb{C}^{c_{k+1}}$ est basé sur la théorie du transport parallèle. Cette théorie va nous permettre de comparer des orientations en différents points. Pour pouvoir l'utiliser, il faut d'une part, une variété Riemannienne connexe dénombrable à l'infini, et d'autre part une courbe fermée sur cette variété.

Définition 4.1.1 *Le transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$ le long d'une courbe γ dans (L, g) est l'application linéaire P_t de $T_{\gamma(0)}L$ dans $T_{\gamma(t)}L$ qui à tout $v \in T_{\gamma(0)}L$ associe le vecteur $X_v(t)$, avec X_v le champ de vecteurs parallèle le long de la courbe γ telle que $X_v(0) = v$.*

Rappelons qu'un champ de vecteurs X le long d'une courbe est dit parallèle si :

$$\frac{D}{dt}X = 0$$

où $\frac{D}{dt}$ désigne la dérivée covariante. On peut voir ce champ comme le champ tel que le produit scalaire $\langle X(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t) \rangle$ soit constant pour toute valeur de t (et égal à la valeur en $t = 0$). Pour plus de détails, voir [24].

Pour toute courbe γ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et pour tout vecteur $v \in T_{\gamma(t_0)}L$, il existe un unique champ de vecteurs parallèle le long de γ et tel que $X(t_0) = v$. Nous avons de plus la proposition suivante.

Proposition 4.1.1 *Le transport parallèle définit pour tout t une isométrie de $T_{\gamma(0)}L$ dans $T_{\gamma(t)}L$. Plus généralement, si X et Y sont deux champs de vecteurs le long de γ alors :*

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right)$$

où $\frac{D}{dt}$ désigne la dérivée covariante.

Définition 4.1.2 *L'isométrie définie par le transport parallèle est appelée holonomie de γ .*

En utilisant les propriétés élémentaires d'un champ de vecteurs parallèle le long d'une courbe, nous pouvons vérifier le résultat suivant.

Proposition 4.1.2 *Le transport parallèle conserve le produit scalaire.*

Preuve : Il suffit de remarquer que si l'on choisit deux vecteurs $v_1, v_2 \in T_{\gamma(0)}L$ et une courbe γ alors le transport parallèle le long de cette courbe nous définit deux champs de vecteurs $P_t(v_1) = X_{v_1}(t)$ et $P_t(v_2) = X_{v_2}(t)$. Ces deux champs de vecteurs étant parallèles le long de la courbe, on obtient :

$$\frac{d}{dt}g(X_{v_1}(t), X_{v_2}(t)) = 0$$

Ce qui nous donne $g(X_{v_1}(t), X_{v_2}(t)) = g(X_{v_1}(0), X_{v_2}(0)) = g(v_1, v_2)$. ■

Le produit scalaire étant conservé, il est clair que si la variété est orientée alors le transport parallèle préserve l'orientation. Mais ce résultat est en fait beaucoup plus fort, car même si la variété n'est pas orientée, cela va nous permettre de transporter les orientations. Nous allons rapidement détailler cette idée.

4.1.1.3 Transport d'orientation

Nous donnons le procédé pour comparer l'orientation d'une sous-variété A d'une variété L en deux points distincts appartenant à une même trajectoire.

Considérons une courbe γ sur la variété L reliant deux points $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$, et fixons une orientation de la variété en chacun de ces points. Soit aussi A une sous-variété de L contenant la courbe γ et fixons une orientation de cette variété en ces deux points. Notons (e_1, \dots, e_p) une base orientée de $T_y A$ que l'on complète en une base orientée $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_{n-p})$ de la variété ambiante L .

D'après la proposition 4.1.1, le transport parallèle le long de la courbe γ définit une isométrie entre les espaces tangents en deux points de la trajectoire γ . De plus, le transport parallèle le long de cette courbe vue comme élément de la sous-variété A coïncide avec le transport parallèle le long de cette courbe vue comme élément de la variété globale L . Ce résultat découle immédiatement de l'unicité du champ de vecteurs parallèle avec condition initiale imposée.

Ainsi, l'image $(P_t(e_1), \dots, P_t(e_p))$ de la base (e_1, \dots, e_p) fournit une orientation de $T_x A$ et de même, l'image $(P_t(e_1), \dots, P_t(e_p), P_t(f_1), \dots, P_t(f_{n-p}))$ de la base (e_1, \dots, e_p) fournit une orientation de $T_x L$.

4.1.1.4 Orientation de l'orthogonal d'un vecteur

Considérons x un point de la variété L . On suppose avoir fixé une orientation de $T_x L$, et on se donne un élément $\nu \in T_x L$. Nous pouvons obtenir une orientation induite de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_x L}}$ de la manière suivante.

L'espace $T_x L$ étant orienté, on a une base (orientée) (e_1, \dots, e_n) de cet espace. Donnons nous une base de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_x L}}$ que l'on note (f_2, \dots, f_n) . On dira que l'espace $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_x L}}$ est muni de l'orientation induite par celle de $T_x L$ si la base (ν, f_2, \dots, f_n) est dans la même classe d'orientation que (e_1, \dots, e_n) . Si c'est la cas, on dira que la base (f_2, \dots, f_n) est une base orientée de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_x L}}$ induite par l'orientation de $T_x L$.

4.1.2 Principe de la construction

Donnons nous deux points critiques y^{q+1} et x^q , et une trajectoire γ reliant ces deux points critiques. Cela signifie que :

$$\gamma \in \mathcal{M}(x, y) := W^u(x) \cap W^s(y)$$

avec $\dim \mathcal{M}(x, y) = 1$. Nous omettrons les indices des points critiques dans la suite. Remarquons que les points critiques sont les limites en $\pm\infty$ de la fonction γ .

Nous savons que :

- $T_y L = T_y W^u(y) \oplus T_y W^s(y)$
- $T_x L = T_x W^u(x) \oplus T_x W^s(x)$

De plus, nous avons fixé des orientations des plans tangents aux variétés stables et instables en chaque point critique. Mais dans le passage de x à y , on constate que :

1. $\dim T_x W^u(x) = p - q = 1 + (p - q - 1) = 1 + \dim T_y W^u(y)$
2. $\dim T_x W^s(x) = q = -1 + (q + 1) = -1 + \dim T_y W^s(y)$
3. le vecteur $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ appartient à $T_{\gamma(t)} W^u(x) \cap T_{\gamma(t)} W^s(y)$.

Les limites $\nu_{\pm} = \lim_{\pm\infty} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ vérifient :

$$\nu_- \in T_x W^u(x) \text{ et } \nu_+ \in T_y W^s(y)$$

D'une certaine manière, c'est le vecteur ν_- qui, transporté le long de γ , passe de $T_x W^u(x)$ à $T_y W^s(y)$ et explique l'augmentation de la dimension de $T_y W^s(y)$ et la diminution de la

dimension de $T_x W^u(x)$. On aimerait ici comparer les orientations de $T_x W^s(x) \oplus \mathbb{R}\nu_-$ et $T_y W^s(y)$.

A cet effet, on transporte parallèlement le long de γ , l'espace $T_x W^s(x)$ et son orientation pour obtenir un sous-espace orienté de dimension q de $T_y L$. L'orthogonal de ν_+ dans $T_y W^s(y)$ est un autre sous espace orienté de dimension q dans $T_y L$ et nous notons :

$$n_\gamma = \begin{cases} +1 & \text{si les orientations coïncident;} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons en réalité comparer les orientations au point $\gamma(0)$ situé entre x et y afin d'éviter d'étendre le transport parallèle qui n'est a priori pas défini en y .

4.1.3 Construction détaillée

Rappelons que l'on fixe en chaque point critique une orientation de $T_x W^s(x)$ et de $T_x W^u(x)$, ce qui induit une orientation de $T_x L$. Comme précédemment, on se donne deux points critiques y^{q+1} et x^q , et une trajectoire γ allant de x à y . Nous omettrons les indices dans la suite. Comme nous l'avons déjà précisé, nous pouvons appliquer la théorie du transport parallèle à cette trajectoire.

Notons $(e_1(y), \dots, e_{q+1}(y))$ resp. $(e_1(x), \dots, e_q(x))$ des bases orientées de $T_y W^s(y)$ resp. $T_x W^s(x)$. De même, $(f_1(y), \dots, f_{p-q-1}(y))$ resp. $(f_1(x), \dots, f_{p-q}(x))$ désignent des bases orientées de $T_y W^u(y)$ resp. $T_x W^u(x)$. Nous obtenons donc des bases orientées des espaces $T_y L$ et $T_x L$ respectivement, définies par :

$$(e_1(y), \dots, e_{q+1}(y), f_1(y), \dots, f_{p-q-1}(y)) \text{ et } (e_1(x), \dots, e_q(x), f_1(x), \dots, f_{p-q}(x))$$

La courbe γ est une courbe sur la variété L et cette dernière est une variété Riemannienne connexe et dénombrable à l'infini. Le transport parallèle nous permet donc comme nous l'avons vu plus haut de transporter l'orientation de $T_x L$ en $T_{\gamma(0)} L$. La base orientée correspondante se note alors :

$$(P_{\gamma(0)}(e_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_q(x)), P_{\gamma(0)}(f_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(f_{p-q}(x)))$$

La courbe γ est aussi une courbe sur la variété $W^u(x)$ et le transport parallèle nous permet aussi de transporter l'orientation de $T_x W^u(x)$ en $T_{\gamma(0)} W^u(x)$. L'unicité du transport parallèle nous permet d'affirmer que la base orientée correspondante est :

$$(P_{\gamma(0)}(f_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(f_{p-q}(x)))$$

En particulier, nous pouvons remarquer que l'orientation de la base :

$$(P_{\gamma(0)}(e_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_q(x)))$$

correspond à celle de l'orthogonal de $T_x W^u(x)$, c'est-à-dire à celle de $T_x W^s(x)$.

Enfin, la courbe γ est aussi une courbe sur la variété $W^s(y)$ et le transport parallèle nous permet de transporter l'orientation de $T_y W^s(y)$ en $T_{\gamma(0)} W^s(y)$. On note alors la base orientée correspondante :

$$(P_{\gamma(0)}(e_1(y)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_{q+1}(y)))$$

Posons $A = \langle \dot{\gamma}(0) \rangle^{\perp_{T_{\gamma(0)} W^s(y)}}$. Cet espace est bien défini puisque $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)} W^s(y)$. Notons alors (h_1, \dots, h_q) une base orientée induite de A au sens où nous l'avons défini, c'est-à-dire telle que $(\dot{\gamma}(0), h_1, \dots, h_q)$ soit dans la même classe d'orientation que la base orientée $(P_{\gamma(0)}(e_1(y)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_{q+1}(y)))$. Pour reprendre les notations, que nous avons utilisées dans la section précédente, il s'agit en fait de l'orientation de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_y W^s(y)}}$ que nous avons transportée au point $\gamma(0)$.

Les espaces $T_{\gamma(0)} W^s(y)$ et $T_{\gamma(0)} W^u(x)$ étant transverses, nous avons, pour des raisons de dimension, l'identification suivante :

$$A \oplus T_{\gamma(0)} W^u(x) = T_{\gamma(0)} L$$

La base orientée $(h_1, \dots, h_q, P_{\gamma(0)}(f_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(f_{p-q}(x)))$ définit ainsi une base orientée de $T_{\gamma(0)} L$. On pose alors :

$$n_\gamma = \frac{\det D}{|\det D|}$$

où D est la matrice du produit scalaire dans les bases suivantes :

$$(P_{\gamma(0)}(e_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_q(x)), P_{\gamma(0)}(f_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(f_{p-q}(x)))$$

$$\text{et } (h_1, \dots, h_q, P_{\gamma(0)}(f_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(f_{p-q}(x)))$$

Cela revient à poser $n_\gamma = 1$ si l'orientation obtenue en concaténant les bases de A et de $T_{\gamma(0)} W^u(x)$ est la même que celle obtenue comme l'image par le transport parallèle de l'orientation de $T_x L$, et $n_\gamma = -1$ sinon.

En observant la forme des deux bases, il est clair que cela revient simplement à comparer l'orientation des bases $(P_{\gamma(0)}(e_1(x)), \dots, P_{\gamma(0)}(e_q(x)))$ et (h_1, \dots, h_q) , c'est-à-dire finalement, à comparer l'orientation de $T_x W^s(x)$ et de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_y W^s(y)}}$, ce que nous cherchions justement à faire.

Pour achever cette construction, il reste à traiter le cas des points critiques d'indice 0. Dans ce cas, nous avons $\dim W^s(x) = 0$ et on ne peut donc plus donner de sens à la comparaison des orientations de $T_x W^s(x) = \{x\}$ et de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_y W^s(y)}}$ mais comme nous avons aussi $\dim W^s(y) = 1$, on définit n_γ en comparant directement les orientations du vecteur $\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ et de $T_y W^s(y)$.

4.1.4 Nombre d'orientation et opérateur d'orientation

Considérons comme précédemment deux points critiques x^q et y^{q+1} d'indices respectifs q et $q + 1$. Nous savons qu'il y a au plus un nombre fini de trajectoires reliant ces deux points. D'après la section précédente, nous pouvons associer à chacune de ces trajectoires un nombre $n_\gamma(x; y)$ en comparant deux orientations. On définit alors le nombre d'orientation des deux points critiques x^q et y^{q+1} en posant :

$$\#(x^q, y^{q+1}) = \sum_{\gamma: x^q \rightarrow y^{q+1}} n_\gamma(x^q, y^{q+1})$$

où la somme est effectuée sur toutes les trajectoires reliant les deux points critiques. Par convention, s'il n'existe pas de trajectoire reliant les deux points, nous posons :

$$\#(x^q, y^{q+1}) = 0$$

Ce nombre associé à tout couple de points critiques d'indices voisins sera appelé nombre d'orientation du couple (x, y) .

Rappelons que dans le cas classique, le nombre de points critiques d'indice fixé est fini. En choisissant une numérotation des points critiques de même indice, nous pouvons définir l'opérateur d'orientation comme l'opérateur associé à la matrice d'orientation donnée par :

$$N^q = (\#(x_i^q, y_j^{q+1}))_{(i,j)}$$

Remarque 4.1.1 *Dans le cas de la variété feuilletée, nous n'aurons plus l'hypothèse de finitude du nombre de points critiques. Nous ne pourrions donc plus exprimer l'opérateur sous forme matricielle.*

4.1.5 Invariance par rapport au choix de l'orientation

Pour effectuer la construction précédente, nous avons choisi une orientation de chacun des plans tangents à la variété stable et à la variété instable en chaque point critique. Cependant, nous n'avons pas parlé de l'influence de ce choix de la construction. En particulier, que se passe-t-il si l'on fait un autre choix ?

Il est clair que les nombres d'orientation vont être modifiés. Pour s'en convaincre, il suffit de se placer dans le cas d'un point critique d'indice 0 relié par une seule trajectoire γ à un point critique d'indice 1. Dans ce cas, la valeur du nombre d'orientation $\#(x^0, y^1)$ est donnée par $n_\gamma(x^0, y^1)$ et ce nombre ne dépend que du choix de l'orientation du plan tangent à la variété stable au point x^0 . Il est donc clair que si l'on choisit une orientation opposée en ce point, on obtiendra un coefficient opposé à celui obtenu avec le choix d'orientation précédent.

Cependant, même si les coefficients de la matrice sont modifiés, cette matrice nous permet encore de calculer la cohomologie, c'est-à-dire que son image et son noyau restent inchangés (à isomorphisme près) et l'on aura toujours la relation (importante pour parler d'un complexe) $N^q N^{q-1} = 0$. Pour démontrer ce résultat, il suffit de le prouver pour un changement d'orientation en un seul point critique.

Supposons avoir fait un premier choix d'orientation ce qui nous permet d'obtenir en particulier les deux matrices N^q et N^{q-1} . Prenons alors un point critique x_j^q et changeons uniquement l'orientation de $T_{x_j^q} W^s(x_j^q)$. En reprenant la construction précédente des matrices, on peut affirmer que :

- Ce changement va nous donner une nouvelle matrice \widetilde{N}^q qui est obtenue à partir de la matrice N^q en remplaçant la j -ième ligne par son opposé.
- Ce changement nous donne aussi une nouvelle matrice \widetilde{N}^{q-1} qui est obtenue à partir de la matrice N^{q-1} en remplaçant la j -ième colonne par son opposé.
- Tout le reste est inchangé.

Cette observation nous permet déjà d'affirmer que :

$$N^q N^{q-1} = 0 \Rightarrow \widetilde{N}^q \widetilde{N}^{q-1} = 0$$

D'autre part, en remplaçant la j -ième colonne de N^{q-1} par son opposé, on ne modifie pas son image (à isomorphisme près) donc $\text{Im } \widetilde{N}^{q-1} \cong \text{Im } N^{q-1}$. De même, remplacer la j -ième ligne de la matrice N^q par son opposé ne change pas son noyau (à isomorphisme près), et il en est donc de même pour les groupes de cohomologie.

Finalement, la définition précédente de l'opérateur d'orientation dépend effectivement du choix de l'orientation mais, pour tout choix d'orientation, cet opérateur calcule la même cohomologie et définit bien un complexe.

4.2 Exemples dans le cas du tore à un trou

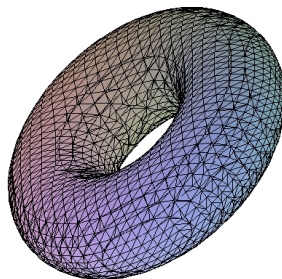


FIG. 4.1 – Tore à un trou

Nous allons maintenant illustrer la construction du complexe d'orientation dans le cas

d'une variété de dimension 3, le tore à un trou. On assimilera ce tore au carré $[0; 1] \times [0; 1]$ en identifiant les côtés deux à deux.

4.2.1 Premier exemple

L'expression la plus naturelle pour une fonction de Morse sur le tore est une somme de sinus et de cosinus. Nous pouvons par exemple choisir :

$$f(x, y) = \cos(4\pi x) + \cos(2\pi y)$$

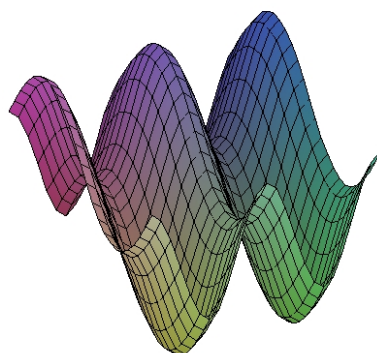


FIG. 4.2 – Surface définie par la fonction f

Plutôt que d'étudier l'indice des points par un calcul long et fastidieux, nous allons faire une étude graphique. Nous pouvons démontrer que les bosses correspondent à des points critiques d'indice 2, les creux à des points critiques d'indice 0, et les points « selles » à des points critiques d'indice 1, on voit donc que l'on a deux points critiques d'indice 0, quatre points critiques d'indice 1 (il ne faut pas oublier le recollement des cotés) et enfin deux points critiques d'indice 2. Nous supposons pour simplifier les notations que les deux points selles sont situés sur l'axe Ox en laissant de côté l'identification. On note les points critiques A_i^q où q désignera l'indice du point et i son rang, les points pour un indice fixé étant ordonnés selon les x croissants, puis les y croissants pour chaque x fixé. (Par exemple, $A_1^2(0; \frac{1}{4})$ et $A_2^2(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ désignent les deux points critiques d'indice 2).

A ce stade, nous avons donc la suite de flèches suivantes :

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{d^0} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{d^1} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{d^2} 0$$

4.2.1.1 Orientation naturelle de la variété

La variété étant orientable, nous pouvons choisir une orientation « naturelle » sur toute la variété. Par exemple, une base sera dite directe si la base obtenue en prenant la base du plan tangent à laquelle on ajoute le vecteur normal à la variété est directe par rapport à l'orientation directe naturelle de \mathbb{R}^3 .

Cela signifie qu'en chaque point critique x^q nous choisissons une base $(e_p)_{1 \leq p \leq q}$ de $T_x W^s(x)$ que l'on complète par une base $(f_p)_{1 \leq p \leq 2-q}$ de $T_x W^u(x)$, de sorte que la base (e_p, f_p) forme une base directe de $T_x L$. Dans un premier temps, nous allons étudier de manière précise la contribution d'un couple de points quelconques, ensuite nous essayerons de déterminer les autres contributions simplement en étudiant le graphe de la fonction.

Contributions des points d'indice 0 et 1 : commençons par étudier les contributions des couples de points d'indice 0 et 1. Considérons une trajectoire γ reliant le point $A_1^0 (\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ au point $A_3^1 (\frac{1}{2}; 0)$.

Nous avons $\dim W^s(A_1^0) = 0$ et $\dim W^s(A_3^1) = 1$. Au point A_3^1 , une base de $T_{A_3^1} W^s(A_3^1)$ est donnée par $(-e_y)$ et donc $(-e_x)$ nous donne une base de $T_{A_3^1} W^u(A_3^1)$ d'après le choix de l'orientation naturelle de la variété. En observant le graphe de la fonction, on voit qu'il existe une unique trajectoire reliant les deux points critiques. On pourrait faire une étude complète de cette trajectoire mais nous ne voulons pas compliquer cet exposé par des calculs qui n'apporteraient que peu de choses pour la compréhension globale.

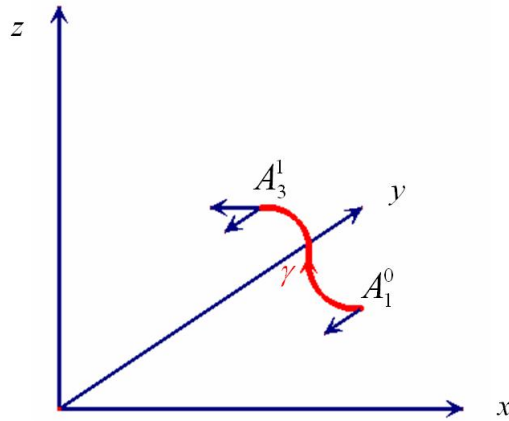


FIG. 4.3 – La trajectoire γ reliant A_1^0 et A_3^1 , et les orientations

La trajectoire γ que nous considérons appartient à $W^u(A_1^0) \cap W^s(A_3^1)$, c'est donc une trajectoire qui part de A_1^0 et qui arrive en A_3^1 . Le vecteur tangent à cette courbe va donc pointer vers A_3^1 , et en passant à la limite en ∞ , on voit qu'il va tendre vers $(-e_y)$. Le nombre n_γ est donc donné par la comparaison des bases $(-e_y)$ de $T_{A_3^1} W^s(A_3^1)$, et $(-e_y)$ de $\langle \nu \rangle$, d'où :

$$\#(A_3^1, A_1^0) = n_\gamma(A_3^1, A_1^0) = +1$$

Nous allons terminer la détermination de la matrice M_{d^0} en commençant par définir une base en chacun des points. Nous raisonnerons ensuite directement à partir du graphe de la fonction.

Choisissons la base $(-e_y)$ pour $T_{A_4^1}W^s(A_4^1)$, et pour $T_{A_1^1}W^s(A_1^1)$, $T_{A_2^1}W^s(A_2^1)$, on prend la base e_x . On obtient alors la matrice suivante (on rappelle que s'il n'existe pas de trajectoire alors le coefficient est nul) :

$$M_{d^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ A_1^0 & A_2^0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ A_4^1 \end{matrix}$$

Contributions des points d'indice 1 et 2 : étudions maintenant les contributions des couples de points d'indice 1 et 2. Considérons une trajectoire γ reliant le point $A_1^1(0; \frac{1}{4})$ au point $A_1^2(0; 0)$. On a $\dim W^s(A_1^1) = 1$ et $\dim W^s(A_1^2) = 2$.

Au point A_1^1 , nous avons choisi e_x pour base de $T_{A_1^1}W^s(A_1^1)$ et donc e_y pour base de $T_{A_1^1}W^u(A_1^1)$. Au point A_1^2 , nous prenons (e_x, e_y) comme base de $T_{A_1^2}W^s(A_1^2)$. En observant le graphe de la fonction, on voit qu'il existe une unique trajectoire reliant les deux points critiques. De même que précédemment, nous raisonnerons directement à partir du graphe de la fonction.

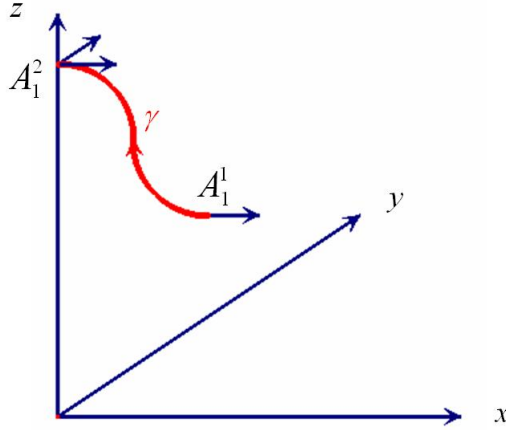


FIG. 4.4 – La trajectoire γ reliant A_1^1 et A_1^2 , et les orientations

La trajectoire γ que nous considérons appartient à $W^u(A_1^1) \cap W^s(A_1^2)$, c'est donc une trajectoire qui part de A_1^1 et qui arrive en A_1^2 . Le vecteur tangent à cette courbe va donc pointer vers A_1^2 , et en passant à la limite en $+\infty$, on voit qu'il va tendre vers $\nu = (-e_y)$. L'orientation induite de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_{A_1^2}W^s(A_1^2)}}$ est donnée par le vecteur $-e_x$. Le nombre n_γ est donc donné par la comparaison des orientations données par les bases e_x et $-e_x$, d'où :

$$\#(A_1^2, A_1^1) = n_\gamma(A_1^2, A_1^1) = -1$$

Ce calcul étant moins clair que dans le cas des points d'indice 0 et 1, nous allons le reprendre pour un autre couple de points. Considérons les deux points critiques $A_3^1 (\frac{1}{2}; 0)$ et $A_1^2 (0; 0)$. Au point A_3^1 , nous avons choisi $-e_y$ pour base de $T_{A_3^1} W^s(A_3^1)$, et donc $-e_x$ pour base de $T_{A_3^1} W^u(A_3^1)$. Au point A_1^2 , nous prenons (e_x, e_y) comme base de $T_{A_1^2} W^s(A_1^2)$. En observant le graphe de la fonction, on voit qu'il existe deux trajectoires reliant les deux points critiques.

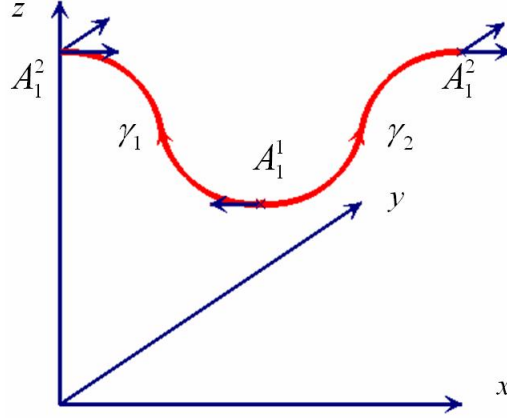


FIG. 4.5 – Les deux trajectoires γ_1, γ_2 reliant A_3^1 et A_1^2

Commençons par considérer la trajectoire contenue dans le demi espace $\{x \leq \frac{1}{2}\}$. La trajectoire γ_1 appartient à $W^u(A_3^1) \cap W^s(A_1^2)$, c'est donc une trajectoire qui part de A_3^1 et qui arrive en A_1^2 . Le vecteur tangent à cette courbe va pointer vers A_1^2 , et en passant à la limite en $+\infty$, on voit qu'il va tendre vers $\nu_1 = (-e_x)$. L'orientation induite de $\langle \nu_1 \rangle^{\perp_{T_{A_1^2} W^s(A_1^2)}}$ est donnée par le vecteur $-e_y$. Le nombre n_γ est donc donné par la comparaison des orientations données par les bases $-e_y$ et $-e_y$, d'où $n_{\gamma_1}(A_1^2, A_3^1) = 1$. En effectuant le calcul pour l'autre trajectoire, on obtient $n_{\gamma_2}(A_1^2, A_3^1) = -1$. On en déduit que :

$$\#(A_1^2, A_3^1) = n_{\gamma_1}(A_1^2, A_3^1) + n_{\gamma_2}(A_1^2, A_3^1) = 0$$

On constate que les contributions se compensent.

Choisissons aussi la base (e_x, e_y) pour $T_{A_2^2} W^s(A_2^2)$. En raisonnant directement à partir du dessin, on obtient alors la matrice suivante (on rappelle que s'il n'existe pas de trajectoire alors le coefficient est nul) :

$$M_{d^1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_1^1 \\ A_2^1 \end{matrix}$$

Conclusion : remarquons tout d'abord que l'on a bien $M_{d^1} M_{d^0} = 0$. Nous allons maintenant vérifier que ces matrices calculent bien la cohomologie. Nous avons :

$$\text{Ker } d^0 = \{(x, y) / (0, 0, x - y, -x + y) = (0, 0, 0, 0)\} = \{(x, x)\} = \mathbb{C} \text{ et } \text{Im } d^0 = \mathbb{C}^2 / \mathbb{C} = \mathbb{C}$$

$\text{Ker } d^1 = \{(x, y, z, t) / (x - y, -x + y) = (0, 0)\} = \{(x, x, z, t)\} = \mathbb{C}^3$ et $\text{Im } d^1 = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}$

Nous pouvons donc en déduire la cohomologie du tore :

$$\begin{aligned} H^0 &= \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^{-1} = \mathbb{C} / 0 = \mathbb{C} \\ H^1 &= \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^0 = \mathbb{C}^3 / \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \\ H^2 &= \text{Ker } d^2 / \text{Im } d^1 = \mathbb{C}^2 / \mathbb{C} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Cette première étude nous montre bien que le choix d'une orientation « naturelle » de la variété est illusoire. En effet, en chaque point critique, on choisit une orientation du plan tangent à la variété mais aussi une orientation du plan tangent à la sous variété stable. Or comme nous l'avons expliqué au préalable, on définit les nombres d'intersections en comparant l'orientation de $\langle \nu \rangle^{\perp_{T_y W^s(y)}}$ à celle de $T_x W^s(x)$ pour chaque trajectoire allant de x à y . Finalement, nous ne nous intéressons qu'aux orientations des variétés stables en chaque point critique. L'orientation de la variété n'est donc imposée que pour permettre une construction rigoureuse de ce nombre. Il est donc clair que la condition d'orientabilité de la variété est totalement superflue, elle n'apporte aucune information complémentaire.

Pour compléter cette illustration, nous allons justement essayer de construire la matrice d'orientation en choisissant de manière quelconque des bases orientées en chaque point critique et observer ce que nous obtenons.

4.2.1.2 Orientation quelconque de la variété

Cette fois, nous supposons que la variété n'est pas forcément orientable. En tout cas, nous ne la munissons pas d'un atlas d'orientation. Pour choisir une orientation en chaque point critique, nous allons donner en chacun des ces points des bases orientées des variétés stables et instables.

Fixons déjà les orientations pour les points d'indice 0 :

$$T_{A_1^0} W^u(A_1^0) = \langle -e_x, e_y \rangle \text{ et } T_{A_2^0} W^u(A_2^0) = \langle e_x, e_y \rangle$$

ainsi que celles des points d'indice 2 :

$$T_{A_1^2} W^s(A_1^2) = \langle e_y, e_x \rangle \text{ et } T_{A_2^2} W^s(A_2^2) = \langle e_x, e_y \rangle$$

Pour les points critiques d'indice 1, nous allons résumer les choix dans un tableau :

	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1
$T_x W^s(x)$	$-e_y$	e_y	e_x	e_x
$T_x W^u(x)$	e_x	e_x	e_y	$-e_y$

Contributions des points d'indice 0 et 1 : en analogie avec ce qui précède, on a :

$$M_{d^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ A_4^1 \\ A_1^0 & A_2^0 \end{matrix}$$

Contributions des points d'indice 1 et 2 : de même, on a :

$$M_{d^1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \end{matrix}$$

Conclusion : remarquons tout d'abord que l'on a encore $M_{d^1}M_{d^0} = 0$. Nous allons maintenant vérifier que ces matrices calculent bien la cohomologie. Un rapide calcul nous permet de vérifier que :

$$\begin{aligned} \text{Ker } M_{d^0} &= \{(x, y) / (0, 0, x - y, x - y) = (0, 0, 0, 0)\} = \{(x, x)\} = \mathbb{C} \\ \text{Im } d^0 &= \mathbb{C}^2 / \mathbb{C} = \mathbb{C} \\ \text{Ker } M_{d^1} &= \{(x, y, z, t) / (-x + y, -x + y) = (0, 0)\} = \{(x, x, z, t)\} = \mathbb{C}^3 \\ \text{Im } d^1 &= \mathbb{C}^4 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien la cohomologie du tore :

$$\begin{aligned} H^0 &= \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^{-1} = \mathbb{C} / 0 = \mathbb{C} \\ H^1 &= \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^0 = \mathbb{C}^3 / \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \\ H^2 &= \text{Ker } d^2 / \text{Im } d^1 = \mathbb{C}^2 / \mathbb{C} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

4.2.2 Second exemple

Le dernier point à étudier sur la détermination de la matrice d'orientation concerne la validité de la formule $d^i d^{i-1} = 0$ qui doit être conservée même si l'on change les orientations. Comme nous l'avons vu cela est vrai pour les exemples précédents.

En fait, ces derniers ne sont pas probants pour affirmer un tel résultat. En effet, la première fois que nous avons calculé la matrice du complexe avant d'avoir rédigé un procédé précis, nous nous étions aperçus que l'opérateur obtenu ne vérifiait pas cette relation mais ce problème n'apparaissait pas si la fonction n'avait pas suffisamment de points critiques. Nous allons donc étudier une fonction avec suffisamment de points critiques afin de vérifier que nos raisonnements sont encore valables.

On considère la fonction de Morse suivante :

$$f(x, y) = \cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est bien de Morse sur le tore.

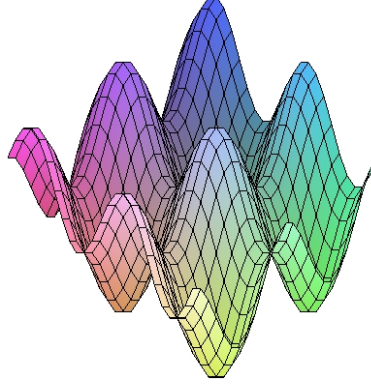


FIG. 4.6 – Surface définie par la fonction f

Graphiquement, on voit que cette fonction possède quatre points critiques d'indice 0, huit points critiques d'indice 1 (il ne faut pas oublier le recollement des cotés) et enfin quatre points critiques d'indice 2. Comme précédemment, on notera ces points A_i^q où q désignera l'indice du point et i son rang, et on choisit d'ordonner les rangs par abscisse croissante, et pour chaque abscisse fixée par ordonnée croissante. A ce stade, nous avons donc la suite de flèches suivantes :

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{d^0} \mathbb{C}^8 \xrightarrow{d^1} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{d^2} 0$$

4.2.2.1 Orientation naturelle de la variété

Comme nous l'avons remarqué dans l'exemple précédent, l'orientation « naturelle » de la variété est illusoire. Cependant, cette notion a un sens intrinsèque sur la variété, et nous impose un choix cohérent des orientations de chaque plan tangent à la variété globale. Nous allons donc tout de même commencer en imposant ce choix d'orientation. Une base sera dite directe si la base obtenue en prenant la base du plan tangent à laquelle on ajoute le vecteur normal à la variété est directe par rapport à l'orientation directe naturelle de \mathbb{R}^3 . Cela signifie qu'en chaque point critique x^q , nous choisissons une base $(e_p)_{1 \leq p \leq q}$ de $T_x W^s(x)$ que l'on complète par une base $(f_p)_{1 \leq p \leq 2-q}$ de $T_x W^u(x)$, de sorte à ce que la base (e_p, f_r) forme une base directe de $T_x L$ au sens précédent.

Comme dans le cas précédent, nous explicitons clairement le choix des bases orientées en chaque point critique, et nous déterminons directement les contributions en étudiant le graphe de la fonction. Pour les points d'indice 0, on choisit $T_{A_i^0} W^u(A_i^0) = \langle e_x, e_y \rangle$ et pour les points d'indice 2, on choisit de même $T_{A_i^2} W^s(A_i^2) = \langle e_x, e_y \rangle$. Pour les points

critiques d'indice 1, il faut étudier les variétés stables et instables, nous résumons les choix d'orientations sous forme d'un tableau :

	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1	A_5^1	A_6^1	A_7^1	A_8^1
$T_x W^s(x)$	e_x	e_x	e_y	e_y	e_x	e_x	e_y	e_y
$T_x W^u(x)$	e_y	e_y	$-e_x$	$-e_x$	e_y	e_y	$-e_x$	$-e_x$

Encore une fois, nous reprenons exactement ce que nous avons fait dans la partie précédente.

Contributions des points d'indice 0 et 1 : la contribution est directement donnée par le produit scalaire du vecteur limite ν au point x et du vecteur choisi pour l'orientation de $T_{A_i^1} W^s(A_i^1)$. Nous allons donc déterminer la matrice M_{d^0} directement à partir du dessin :

$$M_{d^0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ A_4^1 \\ A_5^1 \\ A_6^1 \\ A_7^1 \\ A_8^1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 & A_4^0 \end{matrix}$$

Contributions des points d'indice 1 et 2 : il faut calculer le produit scalaire du vecteur choisi pour l'orientation de $T_{A_i^1} W^s(A_i^1)$ et du vecteur $\tilde{\nu}$ choisi tel que la base $(\nu, \tilde{\nu})$ soit dans la même classe d'orientation que la base choisie pour $T_{A_i^2} W^s(A_i^2)$. Nous ne détaillons pas les calculs et nous déterminons directement la matrice grâce au dessin :

$$M_{d^1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_3^2 \\ A_4^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 & A_6^1 & A_7^1 & A_8^1 \end{matrix}$$

Conclusion : remarquons tout d'abord que l'on a encore $M_{d^1} M_{d^0} = 0$. En effet, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 M_{d^1} M_{d^0} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient :

$$\text{Ker } d^0 = \{x \in \mathbb{C}^4 / d^0 x = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = \mathbb{C}$$

On en déduit que :

$$\text{Im } d^0 = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C} = \mathbb{C}^3$$

En cherchant le rang de M_{d^1} , on obtient :

$$\text{Im } d^1 = \mathbb{C}^3$$

On en déduit alors que :

$$\text{Ker } d^1 = \mathbb{C}^8 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^5$$

Ces résultats nous permettent d'en déduire la cohomologie du tore :

$$\begin{aligned}
 H^0 &= \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^{-1} = \mathbb{C} / 0 = \mathbb{C} \\
 H^1 &= \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^0 = \mathbb{C}^5 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \\
 H^2 &= \text{Ker } d^2 / \text{Im } d^1 = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

4.2.2.2 Orientation quelconque de la variété

Cette fois, nous supposons que la variété n'est pas forcément orientable. En tout cas, nous ne la munissons pas d'un atlas d'orientation. Pour choisir une orientation en chaque point critique, nous allons donner en chacun de ces points des bases orientées des variétés stables et instables. Cette fois, nous n'imposons pas la condition d'avoir une base « directe » pour l'orientation induite par celle de \mathbb{R}^3 . Nous ne détaillons pas l'orientation aux points d'indice 0 car comme nous l'avons déjà vu, elle n'intervient pas dans les calculs.

Comme précédemment, pour les points critiques d'indice 1, nous synthétisons les choix d'orientations sous la forme d'un tableau :

	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1	A_5^1	A_6^1	A_7^1	A_8^1
$T_x W^s(x)$	$-e_x$	e_x	$-e_y$	$-e_y$	e_x	e_x	$-e_y$	e_y
$T_x W^u(x)$	e_y	$-e_y$	e_x	$-e_x$	e_y	$-e_y$	$-e_x$	e_x

	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_4^2
$T_x W^u(x)$	(e_y, e_x)	(e_x, e_y)	(e_x, e_y)	(e_y, e_x)

Pour les points d'indice 2, résumons aussi les choix sous forme d'un tableau :

Cela étant, nous pouvons reprendre exactement ce que nous avons fait dans la partie précédente.

Contributions des points d'indice 0 et 1 : la contribution est directement donnée par le produit scalaire du vecteur limite ν au point x et du vecteur choisi pour l'orientation de $T_{A_i^1} W^s(A_i^1)$. Nous allons donc déterminer la matrice M_{d^0} directement à partir du dessin :

$$M_{d^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 & A_4^0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ A_4^1 \\ A_5^1 \\ A_6^1 \\ A_7^1 \\ A_8^1 \end{matrix}$$

Contributions des points d'indice 1 et 2 : il faut calculer le produit scalaire du vecteur choisi pour l'orientation de $T_{A_i^1} W^s(A_i^1)$, et du vecteur $\tilde{\nu}$ choisi tel que la base $(\nu, \tilde{\nu})$ soit dans la même classe d'orientation que la base choisie pour $T_{A_i^2} W^s(A_i^2)$. Nous ne détaillons pas les calculs et nous déterminons directement la matrice grâce au dessin :

$$M_{d^1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_3^2 \\ A_4^2 \end{matrix}$$

$$A_1^1 \quad A_2^1 \quad A_3^1 \quad A_4^1 \quad A_5^1 \quad A_6^1 \quad A_7^1 \quad A_8^1$$

Conclusion : Encore une fois, nous avons $M_{d^1}M_{d^0} = 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
 M_{d^1}M_{d^0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous avons encore :

$$\text{Ker } d^0 = \{x \in \mathbb{C}^4 / d^0 x = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = \mathbb{C}$$

Nous pouvons donc en déduire que :

$$\text{Im } d^0 = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C} = \mathbb{C}^3$$

En cherchant le rang de M_{d^1} , nous obtenons :

$$\text{Im } d^1 = \mathbb{C}^3$$

Nous en déduisons que :

$$\text{Ker } d^1 = \mathbb{C}^8 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^5$$

Nous retrouvons donc une nouvelle fois la cohomologie du tore :

$$\begin{aligned}
 H^0 &= \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^{-1} = \mathbb{C} / 0 = \mathbb{C} \\
 H^1 &= \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^0 = \mathbb{C}^5 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \\
 H^2 &= \text{Ker } d^2 / \text{Im } d^1 = \mathbb{C}^4 / \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

4.2.3 Conclusion

Avant de réaliser cette étude dans le cas du tore, nous nous étions intéressé à la construction de ce complexe sur le cercle. Nous avons choisi de ne pas en parler dans ce travail car la construction (trop simple) n'illustre pas les problèmes que nous avons pu rencontrer.

Les études précédentes de la construction de l'opérateur d'orientation sur le tore à un trou pour deux fonctions différentes ainsi que pour des choix d'orientations différents

permettent de mieux comprendre la manière dont on définit les nombres d'orientations. Cela est beaucoup plus difficile à illustrer en dimension plus grande mais ces deux exemples en donnent déjà une bonne idée.

Nous avons aussi pu vérifier que l'égalité $d^i d^{i-1} = 0$ reste inchangée même si l'on modifie les orientations en chaque point critique. Remarquons que cela implique en particulier qu'il s'agit bien d'un complexe.

4.3 Complexe d'orientation feuilleté

4.3.1 Problématique

Nous venons d'illustrer sur des exemples le procédé pour construire l'opérateur associé au complexe d'orientation dans le cas d'une variété compacte Riemannienne connexe. Considérons maintenant une variété M (Riemannienne connexe compacte) feuilletée par un feuilletage \mathcal{F} de dimension p et de classe \mathcal{C}^∞ . On note encore f une fonction de Morse feuilletée généralisée.

On sait que les feuilles du feuilletage sont des variétés (et pas forcément des sous-variétés de M) de dimension p , connexes et Riemanniennes via la métrique induite. Elles sont aussi dénombrables à l'infini. En particulier, on a sur chacune de ces feuilles la connexion de Levi Cevita, ce qui nous permettra d'appliquer la théorie du transport parallèle.

Comme nous l'avons déjà précisé, même si la variété M est compacte, les feuilles peuvent ne pas être compactes. Nous ne pouvons donc pas appliquer directement la construction précédente. Les hypothèses sur les trajectoires démontrées dans le chapitre 2 vont nous permettre de réaliser cette construction malgré tout.

4.3.2 Champ de complexes

Dans le cas classique, nous avons défini le complexe d'orientation en utilisant le caractère fini du nombre de points critiques d'indice fixé sur la variété. Cette propriété découle directement de la compacité de la variété globale. Malheureusement, cette hypothèse de compacité n'est plus vraie sur les feuilles, et nous avons a priori une infinité dénombrable (éventuellement un nombre fini) de points critiques pour chaque indice.

Une idée naturelle consisterait à étudier le problème dans une carte locale feuilletante puis à considérer un recouvrement de la variété par un nombre fini de cartes afin d'obtenir le résultat globalement. Cependant, nous avons vu que la détermination du complexe passe

par les liens existants entre les points critiques d'indices voisins de la variété, ici la variété feuille. En restreignant le complexe à des cartes locales nous risquons donc de perdre de précieuses informations.

Rappelons que la mesure transverse $c_q := \Lambda(C^q) \geq 0$ coïncide avec la dimension de Murray-Von Neumann du champ de carré intégrable $(l^2(C^q \cap L))_{L \in M/\mathcal{F}}$. Cette mesure est en particulier finie et nous donne l'analogue du nombre fini de points critiques dans le cas classique. Nous allons donc considérer le champ d'espace $(l^2(C^q \cap L))_{L \in M/\mathcal{F}}$ comme l'analogue des espaces vectoriels \mathbb{C}^{c_q} du cas classique. Ces espaces correspondent à des sommes formelles l^2 de points critiques. Nous allons construire la suite de flèches suivante :

$$0 \rightarrow (l^2(C^0)) \rightarrow (l^2(C^1)) \rightarrow \dots \rightarrow (l^2(C^p)) \rightarrow 0$$

Cette suite est définie pour toute feuille L par :

$$0 \rightarrow (l^2(C^0 \cap L)) \rightarrow (l^2(C^1 \cap L)) \rightarrow \dots \rightarrow (l^2(C^p \cap L)) \rightarrow 0$$

Le problème consiste à définir précisément l'opérateur agissant entre ces espaces.

Remarque 4.3.1 *Cette suite de flèches n'est pas bien définie pour les feuilles critiques. En toute rigueur, nous pouvons donc définir ce champ uniquement pour les feuilles non critiques. Ces feuilles ne représentant qu'un ensemble de mesure transverse nulle, cela revient à définir ce champ pour presque toute feuille. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des feuilles non critiques.*

4.3.3 Etude de l'opérateur d'orientation ∂

Nous commençons par donner, rapidement, l'adaptation de la construction de l'opérateur d'orientation ∂ dans le cas feuilleté, en nous inspirant directement de la construction dans le cas classique. Nous démontrerons ensuite que la structure ainsi obtenue définit bien un complexe.

Rappelons que nous avons obtenu une métrique sur M vérifiant les propriétés suivantes pour presque toute feuille (pour toute feuille non critique) :

1. Le champ de gradient associé à la fonction $f|_L$ vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale ;
2. Il existe un nombre N_1 , indépendant de L , tel que pour tout point critique x d'indice q et y d'indice $q+1$ sur L , le nombre de trajectoires reliant x à y est borné par N_1 ;
3. Il existe un nombre N_2 , indépendant de L , tel que pour tout point critique x d'indice q , le nombre de points critiques y d'indice $q+1$ pour lesquels il existe une trajectoire reliant x à y est borné par N_2 .

Comme dans le cas classique, en chaque point critique x d'indice q , on fixe une orientation de $T_x W^s(x)$ et de $T_x(L)$, et il en découle une orientation de $T_x W^u(x)$, caractérisée

par une q -forme que l'on note $\langle x \rangle$. On rajoute par contre l'hypothèse que ce choix soit fait mesurablement dans le sens transverse, cela revient simplement à choisir une q -forme qui varie mesurablement le long de la variété critique.

Fixons maintenant une feuille non critique et choisissons deux points critiques x et y sur cette feuille. D'après l'hypothèse sur la métrique, il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires reliant ces deux points critiques. Nous pouvons donc recommencer la construction comme dans le cas classique, ce qui nous permet de définir le nombre $\#(x, y)$ en comparant deux orientations exactement comme dans le cas classique.

Remarque 4.3.2 *Par le choix des orientations, ces nombres varient mesurablement dans le sens transverse.*

Nous pouvons alors définir l'opérateur d'orientation :

Définition 4.3.1 *On définit un opérateur de bord $\partial : l^2(C^q \cap L) \rightarrow l^2(C^{q-1} \cap L)$ sur les générateurs en posant :*

$$\partial(x) = \sum_{y \in C^{q-1}} \#(x, y) y$$

où la somme est effectuée sur tous les points critiques d'indice $q - 1$.

D'après la troisième hypothèse sur la métrique, cette somme sera une somme finie avec au plus N_2 termes. Nous allons maintenant étendre cet opérateur aux sommes l^2 puis vérifier les propriétés de cet opérateur.

Proposition 4.3.1 *L'extension de ∂ aux l^2 -sommes nous donne un opérateur borné bien défini $\partial : l^2(C^q \cap L) \rightarrow l^2(C^{q-1} \cap L)$ pour presque toute feuille L et on a un homomorphisme de champs de carré intégrables :*

$$\partial : l^2(C^q) \rightarrow l^2(C^{q-1})$$

Preuve : Il suffit de prendre un élément $\sum a_i x_i \in l^2(C^q \cap L)$ (ie : $\sum a_i^2 < \infty$) et de montrer que $\partial(\sum a_i x_i) \in l^2(C^{q-1} \cap L)$. A l'aide des conditions (2) et (3) sur la métrique, on obtient une majoration sans difficultés et on en déduit même un majorant de la norme de l'opérateur :

$$\|\partial\| \leq N_1 N_2 \sqrt{N_2}$$

En effet, on a :

$$\partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \partial(x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \#(x_i, y_j) y_j \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \#(x_i, y_j) \right) y_j$$

Donc par définition :

$$\left\| \partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) \right\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \#(x_i, y_j) \right)^2$$

Mais d'après les hypothèses faites sur la métrique, chaque x_i est relié à au plus N_2 points critiques y_j , c'est-à-dire que $\#(x_i, y_j)$ est non nul pour au plus N_2 points critiques y_j , on a donc :

$$\left\| \partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) \right\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{r=1}^{N_2} a_{i_r} \#(x_{i_r}, y_j) \right)^2$$

D'autre part, chaque terme $\#(x_i, y_j)$ est majoré par N_1 , ce qui nous donne :

$$\left| \sum_{r=1}^{N_2} a_{i_r} \#(x_{i_r}, y_j) \right| \leq N_2 N_1 \sup_{r=1..N_2} |a_{i_r}| = N_2 N_1 |a_{i_j}|$$

D'où :

$$\left\| \partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (N_1 N_2 |a_{i_j}|)^2 \leq N_1^2 N_2^2 \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i_j}^2|$$

Or chaque terme a_{i_j} apparaît au plus N_2 fois dans la somme $\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i_j}^2|$ car chaque fois qu'il apparaît cela correspond à une trajectoire reliée au point x_{i_j} . On en déduit que cette somme est majorée par N_2 fois la somme de tous les coefficients a_i car cela est valable pour chaque terme a_{i_j} :

$$\left\| \partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (N_1 N_2 |a_{i_j}|)^2 \leq N_1^2 N_2^3 \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i^2|$$

D'où finalement :

$$\left\| \partial \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) \right\| \leq N_1 N_2 \sqrt{N_2} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right\|$$

Cela implique donc d'une part que $\partial(\sum a_i x_i) \in l^2(C^{q-1} \cap L)$ et d'autre part que l'on a une majoration de la norme de l'opérateur : $\|\partial\| \leq N_1 N_2 \sqrt{N_2}$. ■

Maintenant que nous avons défini l'opérateur ∂ , nous allons définir son adjoint. Nous avons en effet sur $l^2(C^q \cap L)$ une structure hilbertienne naturelle. Le produit scalaire est défini par :

$$\langle \omega; \beta \rangle = \left\langle \sum_{x \in C^q \cap L} a_x x; \sum_{y \in C^q \cap L} b_y y \right\rangle = \sum_{x \in C^q \cap L} a_x b_x$$

Nous pouvons donc définir l'opérateur adjoint δ de manière classique par la relation :

$$\forall \omega, \eta \in l^2(C^q) \quad \langle \delta \omega; \eta \rangle = \langle \omega; \partial \eta \rangle$$

D'après la proposition 4.3.1, cet opérateur est borné et bien défini de $l^2(C^q \cap L)$ dans $l^2(C^{q+1} \cap L)$ pour presque toute feuille L et il définit un homomorphisme de fibré de Hilbert :

$$\delta : l^2(C^q) \rightarrow l^2(C^{q+1})$$

C'est cet opérateur qui va nous permettre de définir le complexe d'orientation.

4.3.4 Le complexe d'orientation est un complexe

A ce stade, nous avons donc comme dans le cas classique un opérateur borné entre deux fibrés de Hilbert. Il nous reste donc à démontrer que l'on a bien défini un complexe. En effet, jusqu'à présent, nous parlions de complexe par analogie avec le cas classique. Cependant, nous devons aussi vérifier que $\delta^2 = 0$ ou, ce qui revient au même, vérifier que $\partial^2 = 0$. Comme nous connaissons explicitement la forme de ce dernier opérateur, c'est cette deuxième relation que nous allons démontrer.

Théorème 4.3.1 *L'opérateur ∂ définit un complexe de fibrés de Hilbert : $\partial^2 = 0$.*

La preuve de ce théorème est technique. Nous allons la décomposer en plusieurs étapes.

4.3.4.1 Principe de la preuve

Par définition, nous avons :

$$\partial^2 \langle x \rangle = \partial (\partial \langle x \rangle) = \sum_{\substack{\text{ind}(z) = \text{ind}(x) + 2 \\ \text{ind}(y) = \text{ind}(x) + 1}} \#(x, y) \#(y, z) \langle z \rangle$$

On rappelle (Cf. 2.3.3) que l'on a une action naturelle de \mathbb{R} sur $M(x, y)$, et que l'on peut définir la variété quotient pour cette action :

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) = \mathcal{M}(x, y) / \mathbb{R}$$

D'après la forme de l'opérateur ∂ , la relation $\partial^2 = 0$ signifie que le nombre de paires de (classes de) trajectoires $([\gamma^-], [\gamma^+]) \in \bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$ est pair et que pour chaque paire de telles trajectoires, les contributions vont se compenser.

La preuve de ce résultat consiste à démontrer qu'il y a une correspondance bijective entre le bord de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$, soit l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z) \setminus \mathcal{M}(x, z)$, et les paires de trajectoires appartenant à $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$. En effet, remarquons que si $\text{ind}(z) = \text{ind}(x) + 2$ alors la variété $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ est de dimension 1. On en déduit qu'il s'agit d'une réunion dénombrable de cercles et d'intervalles ouverts. Il suffit pour cela de considérer le découpage de cette variété en composantes connexes. En particulier, cela signifie que le nombre d'éléments du bord est pair.

Nous allons donc commencer par prouver qu'à chaque extrémité de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$, on peut associer une unique paire de trajectoires. Nous montrerons ensuite que les contributions de chaque paire se compensent. *M. Pozniak* a démontré ce résultat dans un cadre plus général [64]. Nous adaptons la preuve à notre cadre en ne reprenant que les grandes étapes de cette démonstration.

Remarque 4.3.3 *D'après la proposition 3.4.2, l'ensemble $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$ est un ensemble fini.*

4.3.4.2 Correspondance bijective entre les bords de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ et des paires de trajectoires

Les éléments du bord de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ sont des suites de trajectoires. Nous donnons donc un lemme qui permet sous certaines conditions d'assurer l'existence d'une sous-suite convergente. Pour cela, nous définissons la notion de convergence vers une trajectoire brisée (notion introduite par *J. L. Heitsch* et *C. Lazarov* [38]). Une trajectoire brisée est simplement la concaténation de plusieurs trajectoires appartenant à une même feuille.

Définition 4.3.2 *Une suite de trajectoires (γ_n) converge vers une trajectoire brisée $(\gamma^1, \dots, \gamma^r)$ s'il existe des reparamétrisations s_n^1, \dots, s_n^r telles que chaque suite $\gamma_n(\cdot + s_n^i)$ converge vers γ^i uniformément sur tout compact pour $i = 1, \dots, r$.*

Le lemme suivant assure que l'on peut toujours extraire d'une suite de trajectoires une sous-suite convergeant vers une trajectoire brisée à condition que la suite de trajectoires soit suffisamment loin des feuilles critiques.

Lemme 4.3.1 *Toute suite de trajectoires $(\gamma_n)_n$, telle que l'adhérence de cette suite ne coupe aucune feuille critique, admet une sous suite qui converge vers une trajectoire brisée.*

Preuve du Lemme 4.3.1 : Considérons une suite de trajectoires $(\gamma_n)_n$ telle que l'adhérence de cette suite ne coupe aucune autre feuille critique. Chaque trajectoire γ_n relie deux points critiques x_n et y_n . Par compacité de la variété critique, nous pouvons supposer que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers des points critiques x et y dans Σ .

L'hypothèse sur l'adhérence de la suite de trajectoires nous permet d'affirmer que les points x et y ne sont pas des points dégénérés, ce sont donc des points de Morse appartenant à une feuille de Morse. Elle nous permet aussi d'affirmer qu'il existe un voisinage Γ_{ε_1} de la caustique tel que les feuilles contenant les trajectoires ne coupent pas ce voisinage. Cela revient simplement à dire que l'on se trouve « suffisamment loin » de la caustique.

D'après la proposition 2.2.2, il existe δ_1 tel que tous les points critiques de $\Sigma \setminus \Gamma_{\varepsilon_1}$ soit à une distance d'au moins δ_1 . Nous notons, comme dans le chapitre précédent, N_{δ_1} le voisinage tubulaire associé à l'ensemble $\Sigma \setminus \Gamma_{\varepsilon_1}$:

$$N_{\delta_1} = \{x \in M / d_{\text{Agmon}}(x, \Sigma \setminus \Gamma_{\varepsilon_1}) \leq \delta_1\}$$

Nous allons maintenant définir le réel :

$$s_n^1 = \sup\{s \in \mathbb{R} : \gamma_n([-\infty; s]) \subset N_{\delta_1}\}$$

Par construction, $\gamma_n(s_n^1)$ appartient à ∂N_{δ_1} , et par compacité de ∂N_{δ_1} , nous pouvons supposer que $\gamma_n(s_n^1)$ converge vers un point de ∂N_{δ_1} . Soit alors γ^1 la trajectoire qui passe par ce point en 0.

D'après la théorie classique des équations différentielles, nous savons que $\gamma_n(\cdot + s_n^1)$ converge uniformément sur tout compact vers $\gamma^1(\cdot)$. Cela implique en particulier que γ^1 admet x comme point de départ. Notons alors x^1 son point d'arrivée. Nous distinguons deux cas :

– $x^1 = y$:

Dans ce cas, c'est terminé puisque la suite de trajectoire converge vers la trajectoire γ^1 uniformément sur tout compact.

– $x^1 \neq y$:

Dans ce cas, on procède par récurrence. Supposons avoir trouvé des trajectoires $\gamma^1, \dots, \gamma^r$ avec γ^i reliant les points x^{i-1} et x^i avec $x^r \neq y$, et des reparamétrisations s_n^1, \dots, s_n^r telles que $\gamma_n(\cdot + s_n^i)$ converge vers γ^i . Notons x^* le point où γ^r pénètre dans N_{δ_1} pour la dernière fois avant de converger vers x^r . Notons x_n^* la suite de points de $\gamma_n \cap N_{\delta_1}$ qui converge vers x^* . Après être passée par x_n^* , chaque trajectoire ressortira de N_{δ_1} . En effet, si ce n'était pas le cas, cela impliquerait que $x^r = y$.

Nous pouvons alors définir s_n^{r+1} comme la valeur pour laquelle γ_n sort de N_{δ_1} pour la première fois après x_n^* . La compacité de ∂N_{δ_1} nous permet de supposer que $\gamma_n(s_n^{r+1})$ converge vers un point de ∂N_{δ_1} et on note γ^r la trajectoire qui passe par ce point au temps 0. Par construction, il est clair que le point de départ de cette trajectoire sera x^r .

Pour conclure, il suffit de constater que pour chaque trajectoire, l'indice du point de départ est strictement plus grand que l'indice du point d'arrivée. Cela implique qu'il n'y aura au plus qu'un nombre fini d'étapes. La preuve du lemme est alors achevée. ■

Le lemme précédent est un résultat beaucoup plus général que le résultat dont nous avons besoin pour obtenir l'existence d'une sous suite convergente dans notre cas. En effet, nous considérons une suite d'éléments de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$, ce qui implique en particulier que toutes les trajectoires appartiennent à la même feuille L passant par z et x , qui n'est pas une feuille critique par hypothèse. L'hypothèse du lemme est donc vérifiée pour toute suite de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$.

Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. D'après le lemme 4.3.1, nous pouvons en extraire une sous-suite qui converge vers une trajectoire brisée qui ne contiendra qu'au plus deux composantes vu les indices des points de départ et d'arrivée. Nous devons donc distinguer deux cas : soit la trajectoire limite n'est constitué que d'une composante γ^1 soit il s'agit de la concaténation de deux trajectoires $(\gamma^1; \gamma^2)$. Or dans le premier cas, cela signifie que $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. Finalement, cela implique que toute extrémité

d'un intervalle ouvert de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ est une trajectoire brisée du type $(\gamma^1; \gamma^2)$.

Nous venons donc de prouver qu'à chaque extrémité de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ on peut associer une paire de trajectoires (γ^1, γ^2) appartenant à $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$ pour un certain point critique y d'indice $q + 1$, c'est-à-dire à l'ensemble $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$. Il reste maintenant à démontrer qu'à chaque paire de trajectoires correspond une extrémité et une seule. Pour cela, nous allons utiliser la théorie des orbites « collantes » introduites par Floer.

Définition 4.3.3 Une famille d'orbites collantes à (γ^1, γ^2) est une famille de trajectoires $\{\gamma_R\}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ indexée par les réels $R \in \mathbb{R}, R > R_0$ convergeant vers (γ^1, γ^2) . Cette famille est unique au sens où tout élément γ de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ proche de (γ^1, γ^2) est aussi un élément de cette famille.

Considérons alors une paire de trajectoires (γ^1, γ^2) appartenant à l'ensemble $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$. Pour démontrer l'existence d'une famille d'orbites collantes à (γ^1, γ^2) , *M. Poniak* commence par approcher la trajectoire brisée par une courbe allant de x à z mais qui n'est pas forcément une trajectoire, puis grâce aux propriétés de cette pseudo-trajectoire, il obtient l'existence d'une famille γ_R d'orbites collantes à (γ^1, γ^2) .

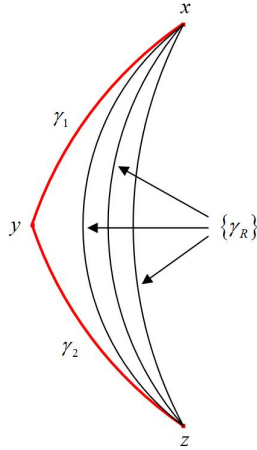


FIG. 4.7 – Famille d'orbites collantes à (γ^1, γ^2)

Il est clair que l'existence d'une famille d'orbites collantes à (γ^1, γ^2) induit l'existence d'une suite de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$ qui converge vers (γ^1, γ^2) . Cela signifie qu'à toute paire de trajectoires (γ^1, γ^2) correspond une extrémité de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. L'unicité de cette correspondance découle du fait qu'une famille d'orbites collantes appartient à une même composante connexe de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$.

Finalement, nous venons de démontrer qu'à toute paire de trajectoires appartenant à l'ensemble $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$, on peut associer une unique extrémité de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. Comme nous l'avons vu, cela nous permet d'en conclure que le nombre d'éléments de l'ensemble $\bigcup_{\text{ind}(y)=\text{ind}(x)+1} \widetilde{\mathcal{M}}(x, y) \times \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)$ est pair.

4.3.4.3 Compensation des contributions pour chaque paire

Pour achever la preuve de la démonstration, il faut montrer que si (γ_1^-, γ_1^+) et (γ_2^-, γ_2^+) sont deux extrémités d'une même composante connexe de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$, alors on a :

$$n_{\gamma_1^-} n_{\gamma_1^+} + n_{\gamma_2^-} n_{\gamma_2^+} = 0$$

Cela revient à dire que les contributions se compensent. Dans la suite, z représente encore un point d'indice $\text{ind}(x) + 2$.

Lemme 4.3.2 *Pour $a \in M$ tel que $f(z) < a < f(x)$, nous avons :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x, z) \text{ est difféomorphe à } \mathcal{M}_a(x, z) = W^u(x) \cap W^s(z) \cap f^{-1}(a)$$

Remarquons que l'on a toujours $f(x) > f(z)$ du fait que l'énergie est positive :

$$(\text{Energie}(\gamma))^2 = f(x) - f(z) \geq 0$$

Preuve du Lemme 4.3.2 : On sait que la fonction est strictement décroissante le long des trajectoires non constantes donc il existe une unique valeur de t notée $\tau_a(x)$ telle que $\gamma_x(\tau_a(x)) \in \mathcal{M}_a$. Appliquons maintenant le théorème des fonctions implicites à la fonction $f \circ \varphi$ avec φ le flot de gradient de la fonction f . On obtient que τ_a est une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur un ouvert U_a de M . Le difféomorphisme cherché est alors induit par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, z) &\rightarrow f^{-1}(a) \\ \gamma &\mapsto \gamma(\tau_a(\gamma(0))) \end{aligned}$$

■

Prenons maintenant $a = f(\gamma_i^-(0))$. Alors d'une part, $\gamma_i^-(0)$ appartient à $f^{-1}(a)$ et d'autre part, γ_i^- est sur le bord de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. Il s'agit donc d'un point appartenant au bord de $\mathcal{M}_a(x, z)$.

Considérons ν_i le champ de vecteurs unitaires tangent à $\mathcal{M}_a(x, z)$ orienté vers l'intérieur au point $\gamma_i^-(0)$. Alors la famille $\left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \nu_i\right)$ forme une base orthonormale de l'espace

tangent $T\mathcal{M}(x, z)$. Cela découle du choix du vecteur ν_i qui est orthogonal au vecteur $\dot{\gamma}$, ce qui nous donne une famille libre, et du fait que la dimension de $T\mathcal{M}(x, z)$ est 2, ce qui nous donne le caractère générateur.

Enonçons maintenant un second lemme.

Lemme 4.3.3 *Nous avons :*

$$n_{\gamma_i^-} n_{\gamma_i^+} = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \nu_i \right) \text{ a la même orientation que } \mathcal{M}(x, z) \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve du Lemme 4.3.3 : Rappelons que l'orientation de $\mathcal{M}(x, y)$ est donnée par les orientations $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ de $T_x W^u(x)$ et $T_y W^u(y)$ respectivement grâce à l'isomorphisme suivant valable pour tout p dans $\mathcal{M}(x, y)$:

$$T_p W^u(x) / T_p \mathcal{M}(x, y) \simeq T_p L / T_p W^s(y) \simeq T_y L / T_y W^s(y) \simeq T_y W^u(y)$$

Lorsque l'indice des points est tel que $\text{ind}(x) = \text{ind}(y) + 1$, le nombre n_γ est tel que $n_\gamma \dot{\gamma}$ forme une base orientée positive de $\mathcal{M}(x, y)$.

La condition de transversalité des variétés stables et instables nous donne l'isomorphisme suivant :

$$T_p W^u(x) / T_p \mathcal{M}(x, y) \simeq T_p W^u(x) / T_p W^u(x) \cap T_p W^s(y) \simeq T_p L / T_p W^s(y)$$

On peut alors choisir une orientation de $T_p \mathcal{M}(x, y)$ de sorte que l'isomorphisme précédent conserve cette orientation. On admet que l'orientation des espaces V, W induit une orientation de l'espace quotient via l'isomorphisme :

$$V \simeq (W \times V) / W$$

Notons $\langle w \rangle$ l'espace engendré par w . Comme $\dim \mathcal{M}(x, y) = 1$, on a :

$$T_{\gamma_i^-} \mathcal{M}(x, y_i) = \langle n_{\gamma_i^-} \dot{\gamma}_i^- \rangle$$

Pour tout $p \in \mathcal{M}(x, y_i)$, nous pouvons en déduire que :

$$T_{y_i} W^u(y_i) \simeq T_p W^u(x) / T_p \mathcal{M}(x, y_i) \simeq T_{\gamma_i^-} W^u(x) / T_{\gamma_i^-} \mathcal{M}(x, y_i) \simeq T_{\gamma_i^-} W^u(x) / \langle n_{\gamma_i^-} \dot{\gamma}_i^- \rangle$$

D'où finalement :

$$T_{y_i} W^u(y_i) \times \langle (-1)^q n_{\gamma_i^-} \dot{\gamma}_i^- \rangle \simeq T_{\gamma_i^-} W^u(x) / T_{\gamma_i^-} \mathcal{M}(x, y_i)$$

Nous pouvons alors vérifier que :

$$T_x W^u(x) \simeq T_z W^u(z) \times \langle n_{\gamma_i^-} \dot{\gamma}_i^- \rangle \times \langle n_{\gamma_i^+} \dot{\gamma}_i^+ \rangle \text{ et } T\mathcal{M}(x, z) \simeq \langle n_{\gamma_i^-} \dot{\gamma}_i^- \rangle \times \langle n_{\gamma_i^+} \dot{\gamma}_i^+ \rangle$$

A partir de ces relations, nous pouvons démontrer que l'on a un isomorphisme qui préserve l'orientation. En particulier, nous obtenons :

$$\left\langle \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \nu_i \right\rangle \simeq \langle \dot{\gamma}_i^-, \dot{\gamma}_i^+ \rangle$$

On en déduit donc bien que le produit $n_{\dot{\gamma}_i^-} n_{\dot{\gamma}_i^+}$ vaut 1 si l'orientation est conservée et -1 sinon. ■

Pour conclure que $n_{\gamma_1^-} n_{\gamma_1^+} + n_{\gamma_2^-} n_{\gamma_2^+} = 0$, il suffit de remarquer que les vecteurs ν_i vont chacun pointer dans des sens opposés. Cela implique qu'une fois l'orientation sera conservée et dans l'autre elle ne le sera pas. Le lemme 4.3.3 nous permet alors d'en conclure que la somme sera nulle, ce que l'on cherchait justement à démontrer.

Nous venons finalement de prouver que l'opérateur d'orientation feuilleté ∂ vérifie la relation $\partial^2 = 0$, ce qui signifie précisément que le complexe d'orientation définit bien un complexe. Cela permet donc de légitimer cette appellation. Nous pouvons maintenant nous intéresser aux complexes de Witten et de De Rham.

Chapitre 5

Complexe de Witten feuilleté et base adaptée

Le complexe de De Rham est un objet classique sur les variétés et il peut être défini sans difficulté sur des variétés feuilletées. A partir de ce complexe, nous pouvons définir par analogie avec le cas classique le complexe de Witten.

Ce complexe est obtenu par un « twist » de l'opérateur via la fonction $e^{\tau f}$, où τ est un paramètre qui tend vers $+\infty$, ainsi qu'une restriction des espaces sur lequel cet opérateur agit. Nous commençons par donner une construction détaillée de ce complexe.

Nous exhibons ensuite une base adaptée, constituée de formes propres approchées associées au Laplacien de Witten feuilleté, dans laquelle l'action de l'opérateur de Witten pourra être calculée simplement. Les formes constituant la base sont localisées au voisinage des points critiques. La connaissance de la forme de l'opérateur dans cette base nous permettra de faire le lien avec l'opérateur d'orientation, comme nous le verrons dans le dernier chapitre.

A. Connes et *T. Fack* ont démontré dans un travail antérieur [17] l'existence d'une base adaptée mais uniquement pour les points critiques en dehors d'un voisinage Γ_ϵ de la caustique. Nous avons prolongé cette construction, qui reste valable pour les points non dégénérés proches de la caustique.

5.1 Complexe de Witten feuilleté

Comme dans le cas classique, la donnée d'une fonction de Morse feuilletée généralisée permet de localiser le calcul de la cohomologie au voisinage de la variété critique. Ceci introduit naturellement un complexe que nous appellerons complexe de Witten, et dont nous rappelons ci-dessous la construction dans le cas classique.

5.1.1 Laplacien de Witten feuilleté

Définition 5.1.1 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ une fonction de Morse généralisée feuilletée sur M , et $\tau \in \mathbb{R}$. Pour chaque feuille L et $0 \leq q \leq p$, on note $d_{\tau,L}^q$ la fermeture de l'opérateur :

$$\omega \in \mathcal{C}_c^\infty(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F})) \rightarrow e^{-\tau f} d_L^q (e^{\tau f} \omega) \in \mathcal{C}_c^\infty(L, \Lambda^{q+1}(T^*\mathcal{F}))$$

dans $L^2(L, \Lambda(T^*\mathcal{F}))$.

Par définition le domaine de définition de cet opérateur est le suivant :

$$\text{Dom}(d_{\tau,L}^q) = \{\omega \in L^2(L, \Lambda(T^*\mathcal{F})) / d_{\tau,L}^q(\omega) \in L^2(L, \Lambda(T^*\mathcal{F}))\}$$

Propriété 5.1.1 $d_\tau^q = (d_{\tau,L}^q)_L$ est un opérateur différentiel qui est elliptique le long des feuilles L .

On vérifie immédiatement que l'adjoint $(d_{\tau,L}^q)^*$ de l'opérateur $d_{\tau,L}^q$ est la fermeture de l'opérateur :

$$\omega \in \mathcal{C}_c^\infty(L, \Lambda^{q+1}(T^*\mathcal{F})) \rightarrow e^{\tau f} (d^q)_L^* (e^{-\tau f} \omega) \in \mathcal{C}_c^\infty(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F}))$$

où $(d^q)_L^* = (-1)^{pq+1} * d_L^q *$ et $*$ est l'opérateur de Hodge sur la feuille.

Définition 5.1.2 On appelle Laplacien de Witten le champ mesurable $(\Delta_{\tau,L}^q)_L$ avec :

$$\Delta_{\tau,L}^q = d_{\tau,L}^{q-1} (d_{\tau,L}^{q-1})^* + (d_{\tau,L}^q)^* d_{\tau,L}^q$$

Cet opérateur est le Laplacien de Witten « classique » sur chaque feuille.

Le champ d'opérateur $\Delta_\tau^q = (\Delta_{\tau,L}^q)_L$ est un champ mesurable d'opérateurs positifs qui agissent sur $(L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F})))_L$. De plus, Δ_τ^q est un opérateur elliptique le long des feuilles, et on peut lui appliquer la théorie de Hodge.

La cohomologie donnée par le Laplacien de Witten feuilleté calcule en fait la cohomologie du complexe de De Rham feuilleté.

Lemme 5.1.1 (Cf. [17]) *Les champs $(\text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q))_L$ et $(\text{Ker}(\Delta_L^q))_L$ d'espaces de Hilbert sont mesurablement isomorphes et pour tout $\tau > 0$ et $0 \leq q \leq p$, on a :*

$$\beta_q = \dim_{\Lambda} \left[(\text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q))_L \right] < \infty$$

Preuve : Pour toute feuille L et $0 \leq q \leq p$, définissons T_L^q l'opérateur borné dans $L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F}))$ défini pour toute forme $\omega \in L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F}))$ par :

$$T_L^q(\omega)(x) = e^{-\tau f(x)} \omega(x)$$

L'opérateur T_L^q est clairement inversible, et il définit un élément de $L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F}))$. On définit alors l'opérateur $U_{\tau,L}^q$ en posant :

$$U_{\tau,L}^q = Q_{\tau,L}^q T_L^q Q_L^q$$

où $Q_{\tau,L}^q$ (resp. Q_L^q) est la projection orthogonale sur le sous-espace $\text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q)$ (resp. $\text{Ker}(\Delta_L^q)$). On peut alors définir un champ mesurable $(U_{\tau,L}^q)_L$ d'endomorphismes d'espaces de Hilbert de $(L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F})))_L$ tel que :

$$U_{\tau,L}^q \text{Ker}(\Delta_L^q) \subset \text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q)$$

Par définition de d_{τ}^q , on a la relation :

$$d_{\tau}^q = T_{\tau}^{q+1} d^q (T_{\tau}^q)^{-1}$$

On omet les L pour simplifier les notations. Cela implique donc que :

$$T_{\tau}^q (\text{Ker } d^q) = \text{Ker } d_{\tau}^q$$

et de même :

$$T_{\tau}^{q+1} (\overline{\text{Im } d^q}) = \overline{\text{Im } d_{\tau}^q}$$

Mais d'après la théorie de Hodge, cela signifie que nous avons la décomposition orthogonale suivante :

$$\text{Ker } d_{\tau}^q = \text{Ker}(\Delta_{\tau}^q) \oplus \overline{\text{Im}(d_{\tau}^{q-1})}$$

Or dans cette décomposition T_{τ}^q est donné par la matrice 2×2 suivante :

$$T_{\tau}^q = \begin{bmatrix} U_{\tau}^q & 0 \\ * & B_{\tau}^q \end{bmatrix}$$

où $B_{\tau}^q = T_{\tau}^q|_{\overline{\text{Im}(d_{\tau}^{q-1})}}$ est inversible.

Rappelons aussi que nous avons la décomposition orthogonale suivante :

$$\text{Ker } d^q = \text{Ker}(\Delta^q) \oplus \overline{\text{Im}(d^{q-1})}$$

On en déduit que $U_{\tau,L}^q$ est un isomorphisme de $(\text{Ker}(\Delta_L^q))_L$ sur $(\text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q))_L$. Finalement, cela implique que pour tout $\tau > 0$:

$$\beta_q = \dim(\text{Ker}(\Delta_L^q))_L = \dim(\text{Ker}(\Delta_{\tau,L}^q))_L < \infty$$

■

5.1.2 Première déformation du complexe

Rappelons que le complexe de De Rham feuilleté est défini feuille à feuille par :

$$0 \rightarrow L^2(L, \Lambda^0(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_L^0} L^2(L, \Lambda^1(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_L^1} \dots \xrightarrow{d_L^{p-1}} L^2(L, \Lambda^p(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_L^p} 0$$

La perturbation de l'opérateur de dérivation que nous venons de faire nous permet alors d'obtenir un nouveau complexe :

$$0 \rightarrow L^2(L, \Lambda^0(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{\tau,L}^0} L^2(L, \Lambda^1(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{\tau,L}^1} \dots \xrightarrow{d_{\tau,L}^{p-1}} L^2(L, \Lambda^p(T^*\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{\tau,L}^p} 0$$

Ce complexe est appelé complexe de De Rham modifié.

Proposition 5.1.1 *Le complexe de De Rham modifié calcule encore la cohomologie de De Rham.*

Preuve : Ce résultat découle immédiatement du lemme 5.1.1 et du fait que la cohomologie est entièrement déterminée par le noyau du Laplacien. ■

5.1.3 Seconde déformation du complexe

Lorsque τ tend vers l'infini, le noyau du Laplacien de Witten feuilleté va se localiser autour de la variété critique. Cette localisation donne naissance à un nouveau complexe que nous appellerons complexe de Witten feuilleté.

Pour définir ce complexe, nous allons adapter la méthode utilisée par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* dans [46]. Pour plus de clarté, nous commençons par rappeler brièvement le procédé de construction dans le cas classique.

5.1.3.1 Principe de la déformation dans le cas classique

Soit M une variété Riemannienne compacte, f une fonction de Morse sur toute la variété et A une constante positive fixée. On définit l'espace E^q comme l'ensemble des espaces propres de Δ_τ^q associés aux valeurs propres appartenant à l'intervalle $]-\infty; A]$. Les espaces que nous obtenons sont des espaces de dimension finie.

On peut montrer que ces espaces ont pour dimension c_q le nombre de points critiques d'indice q de la fonction de Morse f , et que l'on peut les mettre en bijection avec les espaces F^q définis comme les ensembles des espaces propres de Δ_τ^q associés aux valeurs

propres positives et strictement inférieures à $A\tau$. Cela revient à dire qu'il y a un trou dans le spectre de Δ_τ^q .

On considère alors un nouvel opérateur que l'on note encore d_τ défini par restriction de l'opérateur d_τ aux espaces F^q . Cela nous donne un nouveau complexe :

$$0 \rightarrow F^0(M) \xrightarrow{d_\tau^0} F^1(M) \xrightarrow{d_\tau^1} \dots \xrightarrow{d_\tau^{n-1}} F^n(M) \xrightarrow{d_\tau^n} 0$$

Ce complexe est appelé complexe de Witten. Il s'agit d'un complexe entre espaces vectoriels de dimensions finies. En particulier, les opérateurs peuvent être écrits sous forme matricielle. Rappelons d'autre part, que ce complexe calcule encore la cohomologie de *De Rham*. En effet, cette cohomologie est entièrement déterminée par le noyau du Laplacien et étant donné que $\text{Ker } \Delta \subseteq F^q$, on a $\text{Ker } \Delta|_{F^q} = \text{Ker } \Delta$. On ne change donc pas la cohomologie en faisant cette restriction.

5.1.3.2 Adaption de la déformation au cas feuilleté

Comme dans le cas classique, restreignons le complexe modifié à des espaces vectoriels de dimension finie (au sens de Murray-Von Neumann). Par analogie, on pourra considérer les ensembles F_L^q définis comme les ensembles des espaces propres de $\Delta_{\tau,L}^q$ associés aux valeurs propres positives et strictement inférieures à A .

L'ensemble C^q ($0 \leq q \leq p$) désigne encore l'ensemble des singularités tangentielles de Morse d'indice q pour la fonction f . C'est une sous variété lisse de dimension q de M et c'est aussi une transversale borélienne. On définit alors $c_q = \Lambda(C^q)$, et on rappelle que ce nombre correspond à la dimension de Murray-Von Neumann du champ de carré intégrable d'espaces de Hilbert $l^2(C^q \cap L)_L$.

Notons $L^\infty(M/\mathcal{F})$ l'algèbre de Von Neumann de tous les opérateurs mesurables et essentiellement bornés de (M, \mathcal{F}) . La mesure transverse Λ induit une trace semi finie Tr_Λ sur $L^\infty(M/\mathcal{F})$. Soit A une constante fixée strictement positive et notons $P_\tau^k = (P_{\tau,L}^k)_L$ le champ des projections spectrales (appartenant à $L^\infty(M/\mathcal{F})$) :

$$P_{\tau,L}^q = E_{]-\infty; A]}(\Delta_{\tau,L}^q)$$

associées à l'opérateur positif $\Delta_{\tau,L}^q = d_{\tau,L}^{q-1} (d_{\tau,L}^{q-1})^* + (d_{\tau,L}^q)^* d_{\tau,L}^q$ sur l'intervalle $]-\infty; A]$. Nous pouvons vérifier que $Tr_\Lambda(P_\tau^q) < \infty$. Définissons alors le champ $W_\tau^q = (W_{\tau,L}^q)_L$ en posant :

$$W_{\tau,L}^q = \overline{\text{Im}(P_{\tau,L}^q)} = \overline{\text{Im}(E_{]-\infty; A]}(\Delta_{\tau,L}^q))}$$

où $\overline{\text{Im}(T)}$ désigne l'adhérence de l'opérateur T dans $L^2(L, \Lambda^q(T^*\mathcal{F}))$. Il s'agit d'un champ mesurable de carré intégrable. Par définition, nous avons :

$$\dim_\Lambda(W_\tau^q) = Tr_\Lambda(P_\tau^q)$$

On considère alors un nouvel opérateur que l'on notera encore d_τ défini par restriction de l'opérateur d_τ aux espaces W_τ^q . Cela nous permet de définir un nouveau complexe :

$$0 \rightarrow W_{\tau,L}^0 \xrightarrow{d_{\tau,L}^0} W_{\tau,L}^1 \xrightarrow{d_{\tau,L}^1} \dots \xrightarrow{d_{\tau,L}^{p-1}} W_{\tau,L}^p \xrightarrow{d_{\tau,L}^p} 0$$

Ce complexe est maintenant un complexe défini entre espaces de dimensions finies (pour la dimension de Murray-Von Neumann). Il est appelé complexe de Witten feuilleté. La proposition suivante nous permet de relier la cohomologie de De Rham feuilletée et la cohomologie associée au complexe de Witten feuilleté. Il s'agit d'une extension du résultat valable dans le cas classique affirmant que le complexe de Witten (classique) calcule encore la cohomologie de De Rham (classique).

Proposition 5.1.2 *Le complexe de Witten feuilleté calcule la cohomologie de De Rham feuilleté.*

Preuve : Etant donné que $\text{Ker } \Delta_{\tau,L}^q \subseteq W_{\tau,L}^q$, on a $\text{Ker } \Delta_{\tau,L}^q|_{W_{\tau,L}^q} = \text{Ker } \Delta_{\tau,L}^q$. Comme les groupes de cohomologie sont entièrement déterminés par les noyaux du Laplacien associé, on ne change pas la cohomologie en faisant cette restriction. ■

Intuitivement, les espaces W_τ^q sont mesurablement isomorphes aux espaces $l^2(C^q)$, ou du moins ce devrait être le cas lorsque $\tau \rightarrow \infty$. En fait, on pourrait même espérer que ce résultat soit vrai pour tout $\tau \geq B$ avec B suffisamment grand et indépendant des feuilles. A. Connes et T. Fack ont démontré le résultat suivant :

Théorème 5.1.1 *Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique Riemannienne g_ε sur M telle que l'on ait :*

$$\Lambda(C^q) - \varepsilon \leq \dim_\Lambda(W_\tau^q) \leq \Lambda(C^q) + \varepsilon \text{ pour } \tau \text{ suffisamment grand}$$

Ce résultat suggère que pour τ suffisamment grand, les espaces W_τ^q et $l^2(C^q)$ sont de même dimension, et que l'on peut ainsi espérer pouvoir démontrer qu'ils sont mesurablement isomorphes.

Nous laissons pour l'instant la démonstration de cette affirmation de côté afin de continuer notre étude en analogie avec le cas classique. Plus exactement, la base que nous allons construire nous permettra en particulier d'obtenir l'isomorphisme entre les espaces W_τ^q et $l^2(C^q)$. Nous détaillerons cela après la construction de cette base.

5.2 Base adaptée en dehors d'un voisinage de la caustique

Nous considérons à partir de maintenant le complexe défini pour toute feuille non critique par :

$$0 \rightarrow W_{\tau,L}^0 \xrightarrow{d_{\tau,L}^0} W_{\tau,L}^1 \xrightarrow{d_{\tau,L}^1} \dots \xrightarrow{d_{\tau,L}^{p-1}} W_{\tau,L}^p \xrightarrow{d_{\tau,L}^p} 0$$

Si nous connaissons une base de chaque espace $W_{\tau,L}^q$, nous pourrions déterminer complètement la forme de chaque opérateur $d_{\tau,L}^q$ en calculant son action dans ces bases. Par analogie avec le cas classique, on pourra ensuite déterminer le terme prépondérant dans chacun des produits scalaires définissant l'action de $d_{\tau,L}^q$ dans ces bases adaptées.

Pour déterminer une base adaptée, nous nous inspirerons en grande partie du travail d'A. Connes et de T. Fack. En effet, ces derniers ont construit une base adaptée de formes propres approchées mais uniquement pour des points critiques situés en dehors d'un voisinage Γ_ε de la caustique. Nous allons étendre cette construction au cas des points critiques situés dans le voisinage de la caustique mais n'appartenant pas à une feuille dégénérée. Cela nous permettra alors d'obtenir le résultat pour presque toute feuille et plus précisément pour toute feuille ne contenant que des points de Morse.

5.2.1 Résultats préliminaires

Dans toute la suite, nous fixons une feuille L et nous omettrons l'indice L sur les opérateurs. Nous noterons donc $d_L = d$, $d_{\tau,L}^q = d_\tau^q$, etc... Commençons par rappeler les propriétés élémentaires sur le Laplacien de Witten.

Proposition 5.2.1 *On a :*

1. $d_\tau = d + \tau df \wedge$
2. $d_\tau^* = d^* + \tau i_{df}$

Preuve : Rappelons que :

$$\forall f \in A^0, \forall \theta \in A^r, \quad d(f\theta) = fd\theta + df \wedge \theta \text{ et } d^*(f\theta) = fd^*\theta - i_{df}\theta$$

Le résultat est obtenu immédiatement pour la première relation, et pour la seconde, il suffit de passer à l'adjoint dans la première relation. ■

Si ν est un champ de vecteurs sur L et si \mathcal{L}_ν désigne la dérivée de Lie le long de ν , on a pour $\omega \in A^r$ la formule :

$$\mathcal{L}_\nu \omega = d(i_\nu \omega) + i_\nu d\omega \tag{5.1}$$

Propriété 5.2.1 *Le Laplacien de Witten peut se mettre sous la forme suivante :*

$$\Delta_{\tau,L}^q = \Delta_L^q + \tau^2 |d_L f|^2 + \tau Q_L^q$$

où l'opérateur $Q_L^q = \mathcal{L}_{df} + \mathcal{L}_{df}^*$ est un endomorphisme de fibrés vectoriels de $\Lambda^q(T^*\mathcal{F})$ qui vaut en coordonnées locales (u^1, \dots, u^p) :

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{1 \leq j \leq p} \nabla_{(i,j)}^2(f) [du^i \wedge; i_{du^j}]$$

Preuve : La démonstration découle directement de la proposition précédente et du fait que $(i_{\nabla f})^* = df \wedge$. ■

Comme nous l'avons déjà précisé, *T. Fack* et *A. Connes* ont déjà effectué la construction d'une base adaptée pour des points critiques n'appartenant pas au voisinage de la caustique. Nous énonçons donc ce résultat sans démonstration. Pour plus de détails, voir [17].

Théorème 5.2.1 *Pour chaque point critique c dans C^q et contenu dans une carte de Morse, il y a un unique état de plus basse énergie associé à $\Delta_{\tau,L}^q$:*

$$\omega_{c,\tau}(u) = \alpha \tau^{\frac{p}{4}} e^{-\frac{\tau}{2} \sum_{1 \leq i \leq p} (u^i)^2} du^1 \wedge \dots \wedge du^q$$

où α est une constante de normalisation.

Cela signifie qu'à chaque point critique appartenant à une carte de Morse, nous pouvons associer une forme propre dont on connaît même la forme explicite. La forme dépend du point critique c mais nous la noterons parfois simplement ω_τ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

La démonstration du théorème 5.2.1 ne pose pas de réelles difficultés. Elle découle simplement de la forme de la fonction dans une carte de type Morse. Observons également que l'analyse est valable pour tout point critique de Morse, à condition de choisir τ suffisamment grand. Si l'on veut traiter toutes les feuilles de type Morse indépendamment du paramètre τ , il convient d'utiliser les cartes de naissance-mort et de faire l'analyse de la partie basse du spectre de Δ_τ^q dans ces cartes.

Remarquons au passage que nous avons aussi la proposition suivante. Elle démontre l'existence d'un lien étroit entre les points critiques d'indice q et $q + 1$.

Proposition 5.2.2 *Nous avons :*

$$\Delta_\tau^{q+1} d_\tau \omega_\tau(u) = \mu_{\omega_\tau(u)} d_\tau \omega_\tau(u)$$

avec $\mu_{\omega_\tau(u)}$ la valeur propre associée à $\omega_\tau(u)$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
\Delta_\tau^q d_\tau^q \omega_\tau(u) &= \left(d_\tau^q d_\tau^{q*} + d_\tau^{(q+1)*} d_\tau^{(q+1)} \right) d_\tau^q \omega_\tau(u) = d_\tau^q d_\tau^{q*} d_\tau^q \omega_\tau(u) + d_\tau^{(q+1)*} d_\tau^{(q+1)} d_\tau^q \omega_\tau(u) \\
&= d_\tau^q \left(\mu_{\omega_\tau(u)} \omega_\tau(u) - d_\tau^{(q-1)} d_\tau^{(q-1)*} \omega_\tau(u) \right) + d_\tau^{(q+1)*} \underbrace{d_\tau^{(q+1)} d_\tau^q}_{0} \omega_\tau(u) \\
&= d_\tau^q \mu_{\omega_\tau(u)} \omega_\tau(u) - \underbrace{d_\tau^q d_\tau^{(q-1)} d_\tau^{(q-1)*}}_0 \omega_\tau(u) \\
&= \mu_{\omega_\tau(u)} d_\tau^q \omega_\tau(u)
\end{aligned}$$

■

En particulier, cela signifie que $d_{\tau,L}^q \omega_\tau(u)$ est associé à un état de basse énergie du Laplacien $\Delta_{\tau,L}^{q+1}$. Ce résultat n'est pas indispensable pour l'instant mais il nous servira lors de l'étude de l'action de l'opérateur dans la base adaptée.

5.2.2 Perturbations des états propres

Enonçons tout d'abord un lemme démontré par A. Connes et T. Fack dans [17].

Lemme 5.2.1 *Soit f une fonction de Morse feuilletée et K un sous ensemble compact de M tel que $K \cap C = \emptyset$. Posons :*

$$\mu_{K,L,f} = \inf_{x \in L \cap K} |d_L f(x)|$$

Alors pour toute feuille $L \in M/\mathcal{F}$, et pour toute fonction lisse χ de L à support dans $K \cap L$, et pour tout $0 \leq k \leq p$:

$$\chi(\Delta_{\tau,L}^k) \chi \geq \frac{\tau^2}{2} (\mu_{K,L,f})^2 \chi^2$$

pour τ suffisamment grand.

Ce résultat nous permet de constater que les états d'énergie du Laplacien inférieure à $A\tau$ sont concentrés au voisinage des points critiques, puisque l'on voit que l'opérateur $\chi(\Delta_{\tau,L}^k) \chi$ ne peut pas avoir d'états d'énergie inférieure à $A\tau$. En effet, si cet opérateur admettait un tel état d'énergie, il existerait une fonction propre φ non nulle dans $K \cap L$ telle que :

$$\langle \chi(\Delta_{\tau,L}^k) \chi \varphi; \varphi \rangle \leq A\tau$$

Mais cela impliquerait alors que :

$$\frac{\tau^2}{2} (\mu_{K,L,f})^2 \langle \chi^2 \varphi, \varphi \rangle \leq A\tau$$

pour τ suffisamment grand. Or $(\mu_{K,L,f})^2 \langle \chi^2 \varphi, \varphi \rangle > 0$ par hypothèse, donc ceci est absurde.

Pour chaque point critique c dans C^q , on a un unique état de plus basse énergie (*i.e.* : plus petite qu'une constante A) associé à $\Delta_{\tau,L}^q$:

$$\omega_{\tau}(u) = \alpha \tau^{\frac{p}{4}} e^{-\frac{\tau}{2} \sum_{1 \leq i \leq p} (u^i)^2} du^1 \wedge \dots \wedge du^q$$

avec α une constante de normalisation. L'état propre $\omega_{\tau}(u)$ n'est pas à support compact. Par contre, on peut le localiser sans trop perturber son énergie. On définit la fonction $\chi_{\tilde{\varepsilon}}$ de classe \mathcal{C}^{∞} en posant $\chi_{\tilde{\varepsilon}}(u) = \theta_{\tilde{\varepsilon}}(\|u\|^2)$ avec $\theta_{\tilde{\varepsilon}} : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ définie par :

$$\theta_{\tilde{\varepsilon}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}; \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose aussi que $\|\theta'_{\tilde{\varepsilon}}\| = O(\tilde{\varepsilon}^{-1})$ et $\|\theta''_{\tilde{\varepsilon}}\| = O(\tilde{\varepsilon}^{-2})$.

Nous énonçons une nouvelle fois un lemme démontré par *A. Connes* et *T. Fack* [17].

Lemme 5.2.2 *Soit $\tilde{\varepsilon} \in]0; 1]$ fixé. Pour tout $\tau > 0$, la q -forme définie localement par :*

$$\omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}}(u) = \chi_{\tilde{\varepsilon}}(u) \omega_{\tau}(u) = \alpha \tau^{\frac{p}{4}} \theta_{\tilde{\varepsilon}}(\|u\|^2) e^{-\frac{\tau}{2} \sum_{1 \leq i \leq p} (u^i)^2} du^1 \wedge \dots \wedge du^q$$

$$\text{vérifie } \begin{cases} \langle \omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}}; \omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}} \rangle = 1 + O\left(e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}\tau}{8}}\right) \\ \langle \Delta_{\tau,L}^k \omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}}; \omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}} \rangle = O\left(\left(\frac{\tau}{\tilde{\varepsilon}}\right)^{\frac{p-1}{2}} \tilde{\varepsilon} \tau e^{-\tilde{\varepsilon}\tau}\right) \end{cases} \quad \text{pour } \tau \text{ suffisamment grand.}$$

La q -forme $\omega_{\tau,\tilde{\varepsilon}}$ n'est plus un état propre de $\Delta_{\tau,L}^q$ mais son énergie reste faible. On peut donc la voir comme une approximation de l'état propre $\omega_{\tau}(u)$. D'autre part, comme pour la forme propre ω_{τ} , cette forme dépend du point critique considéré mais nous omettrons de l'indiquer s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Fixons $A > 0$ et choisissons $\tilde{\varepsilon}$ suffisamment petit de sorte à ce que pour chaque point critique $c \in C^q \cap \Omega$, on obtienne une q -forme $\omega_{c,\tau}$ à support compact dans U , dépendant de c, τ et telle que :

$$\begin{cases} \int_L \langle \Delta_{\tau,L}^k \omega_{\tau,c}; \omega_{\tau,c} \rangle v_L < A \|\omega_{\tau,c}\|^2 \\ \omega_{\tau,c} \in \mathcal{C}_C(U, \Lambda^k T^* F) \end{cases} \quad \text{dépend continument de } c \quad \text{pour } \tau \text{ suffisamment grand.}$$

5.2.3 Construction de la base adaptée feuilletée

Nous fixons toujours $\varepsilon > 0$ et nous notons encore Γ_{ε} un voisinage ouvert de la caustique Γ dans Σ dont la mesure transverse vérifie $\Lambda(\Gamma_{\varepsilon}) \leq \varepsilon$.

Soit L une feuille non critique et $x \in C_{\varepsilon}^q \cap L$ une singularité de Morse d'indice q . Choisissons alors une carte de Morse $\Omega_i = U_i \times T_i$ contenant x . D'après ce que nous avons

vu, il existe $\tau(\varepsilon) > 0$ et une q -forme $\omega_{x,\tau}^i$ à support compact dans U_i dépendant de x, τ, i et telle que :

$$\int_L \langle \Delta_{\tau,L}^k \omega_{x,\tau}^i; \omega_{x,\tau}^i \rangle v_L < A \|\omega_{x,\tau}^i\|^2 \text{ pour } \tau \geq \tau(\varepsilon)$$

De plus, sachant que $\omega_{x,\tau}^i$ dépend continûment du point critique, on peut choisir $\tau(\varepsilon)$ pour que cette propriété soit satisfaite pour tout point critique de $c \in C^q \setminus \Gamma_\varepsilon$.

Nous obtenons ainsi la proposition suivante qui décrit précisément la forme de la base adaptée.

Proposition 5.2.3 *Comme $\omega_{x,\tau}^i \in \mathcal{C}_C^\infty(U_i, \Lambda^q T^* \mathcal{F})$ et dépend continûment du point critique (le paramètre transverse), on peut arranger les $\omega_{c,\tau}^i$ en un champ de Borel de formes continues :*

$$\omega_\tau : x \in C_\varepsilon^q \rightarrow \omega_{x,\tau} \in \mathcal{C}_C^\infty(L_x, \Lambda^q T^* \mathcal{F})$$

Ces formes vérifient pour tout $\tau \geq \tau(\varepsilon)$:

1. $\langle \Delta_\tau^q \omega_{c,\tau}; \omega_{c,\tau} \rangle < A \|\omega_{c,\tau}\|_2^2$;
2. Si $L_x = L_{x'}$ alors $\text{supp}(\omega_{x,\tau}) \cap \text{supp}(\omega_{x',\tau}) \neq \emptyset$;
(les supports sont deux à deux disjoints)
3. $\|\omega_{x,\tau}\|_2 = 1$ pour tout $x \in C_\varepsilon^q$.

En particulier, la famille $\{\omega_{c,\tau}/x \in C_\varepsilon^q\}$ est une famille orthonormale et nous introduisons naturellement l'espace engendré par cette famille.

Notations 5.2.1 Notons $W_{\tau,L}^q(\varepsilon)$ le sous-espace vectoriel de $L^2(L, \Lambda^q T^* \mathcal{F})$ engendré par les formes $\omega_{x,\tau}$ et $W_\tau^q(\varepsilon) = \{W_{\tau,L}^q(\varepsilon)\}$ le champ associé.

La famille $\{\omega_{x,\tau}/x \in C_\varepsilon^q\}$ est une base orthonormale de $W_\tau^q(\varepsilon)$, cela induit l'isomorphisme mesurable suivant :

$$W_\tau^q(\varepsilon) \cong l^2(C_\varepsilon^q)$$

Cet isomorphisme associe à toute forme $\omega_{c,\tau}$ le point critique c et on l'étend à $W_\tau^q(\varepsilon)$ par linéarité.

Nous allons maintenant étendre cette famille orthonormale aux points critiques de Morse appartenant à des cartes de type naissance-mort.

5.3 Base adaptée dans le voisinage de la caustique

Nous commençons par fixer une feuille non critique L (i.e. : une feuille qui ne coupe pas la caustique Γ et qui ne contient donc que des points critiques de Morse). Comme précédemment, nous omettrons l'indice L . On se place alors sur une carte $\Omega = U \times T$

de type naissance-mort centrée en un point critique dégénéré c d'indice q . Nous venons de démontrer l'existence d'une bonne base associée à des points critiques appartenant à une carte de Morse. Si nous voulons obtenir l'existence de la base de forme pour toutes les feuilles non critiques, il suffit de démontrer que ce résultat est encore valable dans les cartes de type naissance-mort puisque les cartes de Morse et de naissance-mort nous donnent un recouvrement de toute la variété. Nous noterons $P_t (= U \times \{t\})$ les plaques de la carte.

Nous pouvons supposer que $c = 0$ et que la carte considérée est de la forme suivante :

$$U \times T \cong]-1; 1[^p \times]-1; 1[^{n-p}$$

D'après les résultats du chapitre 2, la fonction considérée a la forme suivante dans la carte $U \times T$:

$$f(u, t) = g(t) + \frac{(u^1)^3}{3} - u^1 t^1 - \sum_{i=2}^{m+1} \frac{(u^i)^2}{2} + \sum_{i=m+2}^p \frac{(u^i)^2}{2}$$

Le laplacien de Witten agissant sur les q -formes sur la plaque P_t est donné pour la métrique plate $(ds)^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2 + \dots + (du^p)^2$ par :

$$\Delta_{\tau, P_t}^q = -\frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} + \tau^2((u^1)^2 - t^1)^2 - \tau(2x) + \sum_{i=2}^p \left(-\frac{\partial^2}{(\partial u^i)^2} + \tau^2(u^i)^2 + \tau \varepsilon_i \right)$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, et plus exactement, $\varepsilon_i = -1$ pour $2 \leq i \leq m$ et -1 sinon. Il s'agit d'un opérateur de type Schrödinger.

Contrairement au cas des points de Morse, nous ne pouvons pas espérer obtenir simplement une expression précise des formes exactes associées à de petites valeurs propres de l'opérateur. Nous allons cependant démontrer qu'il n'existe qu'une seule forme propre associée à de petites valeurs propres, plus précisément à des valeurs propres plus petites qu'une constante. Cela revient à déterminer l'image de la projection spectrale notée $P_{]-\infty; A]}(\Delta_{\tau, P_t}^q)$ où A est une constante positive fixée. Pour cela, nous allons commencer par séparer l'étude de l'opérateur global en étudiant un opérateur classique et un opérateur non classique mais à une dimension.

Nous pouvons décomposer l'opérateur sous forme d'une somme d'opérateurs agissant sur $L^2(]-1; 1[) \otimes L^2(]-1; 1[^{p-1})$ grâce au produit tensoriel :

$$\Delta_{\tau, P_t}^q = H_1^q(\tau) \otimes 1 + 1 \otimes H_2^q(\tau) \quad (5.2)$$

avec :

$$H_1^q(\tau) = -\frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} + \tau^2((u^1)^2 - t^1)^2 - \tau(2x)$$

et :

$$H_2^q(\tau) = \sum_{i=2}^p \left(-\frac{\partial^2}{(\partial u^i)^2} + \tau^2(u^i)^2 + \tau \varepsilon_i \right)$$

D'après un résultat de [65], nous savons que le spectre de l'opérateur Δ_{τ, P_t}^q est obtenu comme la somme des spectres de chacun des opérateurs $H_1^q(\tau)$ et $H_2^q(\tau)$.

Pour l'opérateur $H_2^q(\tau)$, nous reconnaissons l'opérateur associé à un oscillateur quantique. Nous traiterons l'étude de cet opérateur après avoir réglé l'étude de l'opérateur $H_1^q(\tau)$ qui n'est pas un opérateur classique.

Pour étudier l'opérateur non classique $H_1^q(\tau)$, on commence par le modifier grâce à un changement de variables. Le nouvel opérateur obtenu est un opérateur de type Schrödinger avec pour potentiel un polynôme de degré 4 dépendant d'un paramètre. L'étude du potentiel combinée à un résultat de *Berezin-Shubin* va nous permettre de prouver que le nombre de valeurs propres négatives de cet opérateur, comptées avec leur multiplicité, est majoré par 1. Nous en déduisons alors l'existence d'une unique fonction propre approchée à support compact associée à un état de basse énergie. Cela signifie que la résolution du problème se ramène à la détermination du spectre de l'opérateur ou du moins à la partie basse de ce spectre.

Le résultat principal que nous utiliserons pour majorer le nombre de valeurs propres négatives est le théorème suivant.

Théorème 5.3.1 [4] *Soit H un opérateur du type Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R})$. Supposons que le potentiel est localement borné, borné inférieurement et que sa partie négative $V_-(x) = \min(0, V(x))$ est continue (c'est en particulier le cas, si le potentiel lui-même est continu). Notons $N_-(H)$ le nombre de valeurs propres négatives comptées avec leur multiplicité, alors nous avons :*

$$N_-(H) \leq 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx$$

En particulier, si l'intégrale qui apparaît dans l'inégalité est strictement plus petite que 1 alors l'opérateur n'a au plus qu'une valeur propre négative.

Ce théorème permet une nouvelle fois de simplifier l'étude puisque l'on passe d'une majoration d'une partie du spectre d'un opérateur à la majoration d'une intégrale.

5.4 Etude de l'opérateur $H_1^q(\tau)$

Tout d'abord, nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel polynomial V :

$$V(x, \tau) = \tau^2 (x^2 - t)^2 - 2\tau x$$

Une étude rapide nous permet de vérifier que le potentiel considéré n'a pas de point critique pour $t < 0$. Cela signifie qu'il n'y aura pas de contributions pour la partie basse du spectre pour $t < 0$. Pour justifier ce résultat, nous pouvons utiliser la même démonstration

que dans le cas de Morse (Cf. lemme 5.2.1), à savoir vérifier que pour toute forme à support sur les plaques P_t avec $t < 0$, on a $\langle \Delta\omega, \omega \rangle \geq A\tau$. Cela implique que sur les plaques $t < 0$, le spectre de l'opérateur ne contiendra aucun élément d'énergie $< A$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que $t \geq 0$ et nous posons alors $\theta^2 = t$.

5.4.1 Simplification de l'opérateur

En passant par la forme quadratique associée à cette opérateur et à l'aide d'un changement de variable, nous allons nous ramener à un opérateur plus simple à étudier. Nous savons en effet que si l'on peut minorer ou majorer la forme quadratique par une constante en facteur de la norme de la fonction, cela nous donnera une borne inférieure ou supérieure pour le spectre de l'opérateur. La forme quadratique associée à l'opérateur précédent est :

$$Q_{\tau,\theta}(f) = \int_{-1}^1 (-ff'' + \tau^2(x - \theta)^2(x + \theta)^2 f^2 - 2\tau x f^2) dx$$

Nous pouvons considérer le problème avec conditions de Neumann ou Dirichlet, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\int_{-1}^1 (-ff'') dx = \int_{-1}^1 (f')^2 dx$$

On commence par faire un changement de variable pour recentrer le problème. Pour cela, on pose $u = x - \theta$, cela nous donne :

$$Q_{\tau,\theta}(f) = \int_{-1-\theta}^{1-\theta} \left((f')^2 + \tau^2 u^2 (u + 2\theta)^2 f^2 - 2\tau (u + \theta) f^2 \right) du$$

Définissons maintenant l'opérateur U en posant :

$$(Uf)(x) = \tau^{\frac{1}{6}} f\left(\tau^{\frac{1}{3}} x\right)$$

La forme quadratique associée à l'opérateur $\tilde{H} = U^{-1} H U$ est donnée par :

$$\widetilde{Q_{\tau,\theta}}(f) = \tau^{\frac{2}{3}} \int_{\tau^{\frac{1}{3}}(-1-\theta)}^{\tau^{\frac{1}{3}}(1-\theta)} \left((f')^2 + u^2 \left(u + 2\theta\tau^{\frac{1}{3}}\right)^2 f^2 - 2 \left(u + \theta\tau^{\frac{1}{3}}\right) f^2 \right) du$$

Nous nous sommes donc ramenés à l'étude de la partie négative du spectre d'un opérateur de type Schrödinger avec comme potentiel :

$$V(u, \theta, \tau) = u^4 - 2u + 4\theta\tau^{\frac{1}{3}}u^3 + 4\theta^2\tau^{\frac{2}{3}}u^2 - 2\theta\tau^{\frac{1}{3}}$$

Pour passer du spectre de cet opérateur à l'opérateur initial, il suffira de le multiplier par $\tau^{\frac{2}{3}}$. Posons alors $h = 2\theta\tau^{\frac{1}{3}}$, cela nous donne :

$$V(u, h) = u^4 - 2u + 2hu^3 + h^2u^2 - h$$

où le paramètre h décrit l'intervalle $[0; \infty[$.

C'est ce potentiel que nous allons étudier dans la suite. il satisfait les hypothèses du théorème 5.3.1 à ceci près que l'intervalle considéré n'est pas \mathbb{R} tout entier. Nous allons voir que cela n'est pas gênant et que nous pouvons nous ramener à une analyse sur $L^2(\mathbb{R})$.

5.4.2 Le problème des bornes

Le problème que nous considérons n'est pas sur $L^2(\mathbb{R})$ mais sur $L^2\left(\left[\tau^{\frac{1}{3}}(-1-\theta); \tau^{\frac{1}{3}}(1-\theta)\right]\right)$. Remarquons tout d'abord que l'on peut remplacer cet ensemble par $L^2\left(\left[-\tau^{\frac{1}{3}}; \tau^{\frac{1}{3}}\right]\right)$. Cela ne présente pas un intérêt très important mais permet d'alléger les écritures.

Notons alors E_n la n -ième valeur propre de l'opérateur $-\Delta + V$ pour le problème sur $L^2(\mathbb{R})$. Nous savons que pour le problème sur $L^2(]-a; a[)$ avec a suffisamment grand ($a \geq a_0(n)$), les valeurs propres correspondantes au problème sur $L^2(]-a; a[)$ pour le problème de Dirichlet et de Neumann que nous notons $E_n^D(a)$, $E_n^N(a)$ vérifient :

$$E_n^N(a) \leq E_n \leq E_n^D(a) \leq E_n^N(a) + e^{-Ka^2}$$

Cela signifie plus simplement que pour a suffisamment grand, les valeurs propres du problème « local » sont exponentiellement proches du problème sur l'axe tout entier. Cela étant, nous pouvons commencer l'étude globale du potentiel $V(x, h)$.

5.4.3 Etude globale du potentiel $V(x, h)$

Le potentiel $V(x, h)$ peut être vu comme une fonction de h ou de x :

$$V(u, h) = u^4 + 2hu^3 + h^2u^2 - 2u - h = h^2x^2 + h(2x^3 - 1) + x^4 - 2x$$

Comme fonction de x , le potentiel $V(x, h)$ est un polynôme de degré 4 dépendant du paramètre h . Le coefficient dominant de ce polynôme étant positif, le potentiel est borné inférieurement. D'autre part, il s'agit d'une fonction continue et donc localement bornée. Nous pouvons donc appliquer le théorème 5.3.1 à l'opérateur $-\Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste maintenant à majorer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx$. Pour cela, nous devons d'abord déterminer la partie négative de la fonction et donc déterminer les zéros du polynôme V .

Dans un premier temps, nous allons démontrer que les racines réelles du potentiel sont nécessairement dans l'intervalle $\left[-2^{-\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{3}}\right]$. Ensuite, nous montrerons qu'il n'y en a que deux : l'une positive et l'autre négative.

5.4.3.1 Positivité du potentiel en dehors de l'intervalle $\left[-2^{-\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{3}}\right]$

Soit $x > 2^{\frac{1}{3}}$ alors nous avons :

$$2x^3 - 1 \geq 4 - 1 = 3$$

Donc, comme $h \geq 0$, nous obtenons :

$$V(x, h) \geq x^4 - 2x$$

La dérivée de $x^4 - 2x$ s'annule en $2^{\frac{1}{3}}$, la fonction $x^4 - 2x$ est donc croissante dès que $x > 2^{\frac{1}{3}}$ et on en déduit que :

$$x^4 - 2x > \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4 - 2\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

Cela implique que :

$$V(x, h) > 0 \text{ pour } x > 2^{\frac{1}{3}}$$

Soit maintenant $x < -2^{-\frac{2}{3}}$. Nous allons étudier le potentiel comme une fonction de h . Nous avons :

$$\begin{aligned} V'_h(x, h) &= 2x^3 - 1 + 2hx^2 \\ V''_h(x, h) &= 2x^2 \end{aligned}$$

La fonction V'_h est une fonction strictement croissante, et comme $V'_h(x, 0) = 2x^3 - 1 < 0$, elle s'annule une et une seule fois en $\alpha = -\frac{2x^3-1}{2x^2}$.

La fonction $V(x, h)$ vue comme fonction de h est donc décroissante puis croissante. Pour démontrer que cette fonction est positive, il suffit de démontrer que le minimum atteint en α est positif. Or nous avons :

$$V(x, \alpha) = -\frac{1}{4} \times \frac{4x^3 + 1}{x^2} = g(x)$$

En particulier, dès que $x < -2^{-\frac{2}{3}}$, nous avons $x^3 < -\frac{1}{4}$ et ainsi $4x^3 + 1 < 0$ d'où $V(x, \alpha) > 0$.

Nous pouvons finalement en conclure que le potentiel est strictement positif en dehors de l'intervalle $\left[-2^{-\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{3}}\right]$.

Remarque 5.4.1 On peut s'interroger sur la détermination des bornes de l'intervalle choisi. Ces choix ont été guidés par l'étude du potentiel pour des valeurs particulières de h . La borne de droite correspond au zéro pour $h = 0$ tandis que l'autre borne correspond au zéro de l'opérateur pour une certaine valeur de h ($h = 6^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$) qui apparaît comme valeur particulière dans l'étude de $V(x, h)$ en fonction de x , étude qui sera faite dans le paragraphe suivant.

5.4.3.2 Etude des zéros du potentiel

Nous commençons par traiter le cas $h = 0$. Dans ce cas, le potentiel est simplement un polynôme de degré 4 en x :

$$V(x, 0) = x^4 - 2x = x(x^3 - 2)$$

Les zéros de ce polynôme sont donc $\left\{0, 2^{\frac{1}{3}}\right\}$.

Nous étudions maintenant le potentiel comme une fonction de x . Nous avons :

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x, h) &= 4x^3 - 2 + 6hx^2 + 2h^2x \\ V^{(2)}(x, h) &= 12x^2 + 12hx + 2h^2 \\ V^{(3)}(x, h) &= 24x + 12h \\ V^{(4)}(x, h) &= 24 \end{aligned}$$

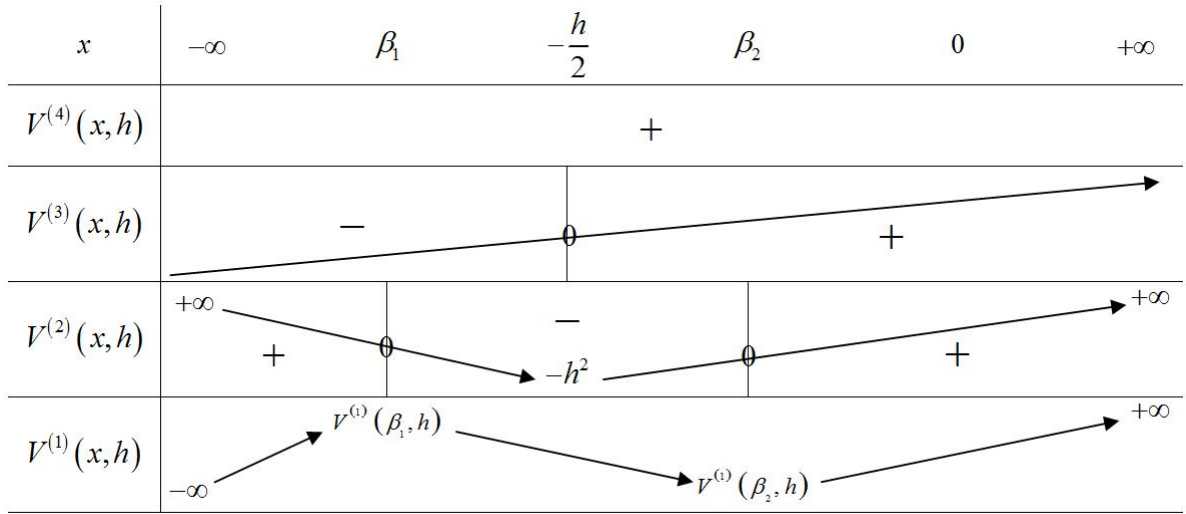


FIG. 5.1 – Tableau de variation de la fonction $x \mapsto V(x, h)$ et de ses dérivées

La fonction $V^{(4)}$ étant strictement positive, la fonction $V^{(3)}$ est strictement croissante et elle s'annule une et une seule fois en $-\frac{h}{2}$. Nous avons $V^{(2)}\left(-\frac{h}{2}, h\right) = -h^2$. Nous pouvons donc en déduire que la fonction $V^{(2)}$ s'annule deux fois en β_1, β_2 avec :

$$\beta_1 = h \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} \right) \text{ et } \beta_2 = h \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

Nous avons alors :

$$V^{(1)}(\beta_1, h) = \frac{1}{9}\sqrt{3}h^3 - 2 \text{ et } V^{(1)}(\beta_2, h) = -\frac{1}{9}\sqrt{3}h^3 - 2$$

Il est clair que $V^{(1)}(\beta_2, h) < 0$. Nous devons par contre distinguer deux cas selon que $V^{(1)}(\beta_1, h)$ est positif ou négatif.

$$V^{(1)}(\beta_1, h) \leq 0 \Leftrightarrow h \leq 6^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

Dans le cas où $h \leq 6^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$, la fonction est strictement décroissante puis strictement croissante. Comme $V(0, h) = -h$, nous pouvons en déduire que ce potentiel admet exactement deux zéros, et de plus, l'un est négatif et l'autre positif.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $h > 6^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$. La fonction admet alors un minimum en γ_1 puis un maximum en γ_2 et enfin un minimum en γ_3 avec les relations suivantes :

$$\gamma_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_2 \leq \beta_2 \leq \gamma_3$$

Remarquons que nous avons :

$$\beta_1 \leq \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \times 6^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \leq -2^{-\frac{2}{3}}$$

donc en particulier, d'après l'étude précédente :

$$V(\gamma_1, h) > 0$$

Comme $V(0, h) = -h$, cela implique que le minimum de la fonction en γ_3 est négatif et donc que la fonction admet deux zéros et deux seulement, et de plus, que l'un est positif et l'autre est négatif.

Finalement, nous venons donc de démontrer que le potentiel en tant que fonction de x n'admet que deux zéros et ces zéros appartiennent à l'intervalle $\left[-2^{-\frac{2}{3}}; 2^{\frac{1}{3}} \right]$. De plus, comme nous l'avons déjà remarqué, $V(0, h) = -h < 0$ implique qu'il y a un zéro positif et un négatif (le cas $h = 0$ ayant déjà été traité). Dans toute la suite, nous notons α_1 et α_2 les zéros du potentiel avec $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

5.4.3.3 Première expression et majoration de l'intégrale

D'après l'étude précédente, nous pouvons simplifier l'expression de l'intégrale cherchée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |xV_-(x)| dx = \int_{\alpha_1}^0 |xV_-(x)| dx + \int_0^{\alpha_2} |xV_-(x)| dx$$

Cela s'écrit encore :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx = \int_{\alpha_1}^0 xV(x) dx - \int_0^{\alpha_2} xV(x) dx$$

Considérons maintenant une primitive F_h de $V(., h)$ qui s'annule en 0 alors nous pouvons écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx = -F_h(\alpha_1) - F_h(\alpha_2)$$

Donnons immédiatement une fonction F_h convenable et que nous choisirons dans toute la suite :

$$F_h(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}hx^5 + \frac{1}{4}h^2x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2$$

Une première majoration de l'intégrale peut être obtenue en utilisant l'encadrement (gros-sier) des zéros du potentiel, à savoir :

$$-2^{-\frac{2}{3}} \leq \alpha_1 \leq 0 \text{ et } 0 \leq \alpha_2 \leq 2^{\frac{1}{3}}$$

Malheureusement, cela ne donne rien car même pour $h = 0$, le majorant est déjà plus grand que 1.

Pour un bon majorant de cette intégrale, nous allons essayer d'obtenir de bons encadrements des zéros du potentiel. Nous pourrons alors utiliser ces encadrements pour obtenir une fonction de h qui majorera la somme $-F_h(\alpha_1) - F_h(\alpha_2)$. Il suffira ensuite d'étudier cette fonction et de vérifier qu'elle est majorée par une constante strictement plus petite que 1.

Supposons avoir obtenu les deux encadrements suivants :

$$0 \leq b_1(h) \leq -\alpha_1(h) \leq a_1(h) \text{ et } 0 \leq b_2(h) \leq \alpha_2(h) \leq a_2(h)$$

Pour simplifier les écritures, nous omettrons parfois les h , nous écrirons donc a, b, α_1 plutôt que $a(h), b(h), \alpha_1(h)$.

Les deux encadrements précédents nous permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} -F_h(\alpha_1) &\leq -\frac{1}{6}(b_1)^6 + \frac{2}{5}h(a_1)^5 - \frac{1}{4}h^2(b_1)^4 - \frac{2}{3}(b_1)^3 + \frac{1}{2}h(a_1)^2 \\ -F_h(\alpha_2) &\leq -\frac{1}{6}(b_2)^6 - \frac{2}{5}h(b_2)^5 - \frac{1}{4}h^2(b_2)^4 + \frac{2}{3}(a_2)^3 + \frac{1}{2}h(a_2)^2 \end{aligned}$$

On note alors $I_1(h), I_2(h)$ les deux fonctions qui apparaissent à droite des deux inégalités. Nous notons aussi $I = I_1 + I_2$. Cette fonction correspond à la fonction qui majore l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx$. Il suffit donc de démontrer que cette fonction est majorée par une constante strictement plus petite que 1 pour obtenir le résultat cherché.

L'étude que nous avons menée sur la fonction $V(x, h)$ pour des valeurs particulières de h , nous amène à distinguer au moins deux cas par rapport à h pour obtenir de bons encadrements. Nous avons choisi de séparer l'étude des cas $h \geq 2$ et $0 \leq h \leq 2$.

5.4.4 Cas $h \geq 2$

Comme le potentiel n'a que deux zéros de signes distincts, il suffit d'étudier le signe de $V(a(h), h)$ et celui de $a(h)$ pour obtenir une inégalité entre $\alpha_i(h)$ et $a(h)$. De plus, si l'on veut obtenir un bon encadrement, il faut aussi que la fonction $V(a(h), h)$ soit le plus proche possible de zéro de sorte que le majorant et/ou le minorant soit lui aussi proche du zéro $\alpha_i(h)$.

Pour obtenir un bon encadrement des zéros, nous allons essayer de déterminer leur forme asymptotique lorsque h est grand. Nous utiliserons ensuite cette information pour obtenir les majorants et minorants. Lorsque h est très grand, le potentiel devient :

$$2hx^3 - h + h^2x^2$$

La partie prépondérante est simplement h^2x^2 , ce qui implique que les deux racines vont tendre vers 0. Cette remarque nous permet de ne conserver que la partie principale du potentiel au voisinage de zéro, à savoir $-h + h^2x^2$. Nous en déduisons que les zéros seront de la forme $\pm \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Evidemment, ce résultat n'est valable que pour h très grand et il n'y a pas de raisons particulières pour que dans notre cas, cela soit valable dès que $h \geq 2$. Cependant, nous allons voir que pour $h \geq 2$, ces fonctions approchent assez bien les racines du potentiel. D'autre part, vu que les zéros ont tendance à être symétriques, nous allons essayer d'obtenir des encadrements du même type pour chacun d'eux. Cela permettra aussi de simplifier l'étude.

Tout ceci nous conduit à poser dans la suite :

$$a(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \text{ et } b(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)$$

5.4.4.1 Encadrement du zéro positif

Nous allons démontrer que :

$$0 \leq b(h) \leq \alpha_2(h) \leq a(h)$$

Nous avons $V(a(h), h) = \frac{1}{h^2} > 0$ et $a(h) > 0$ donc $\alpha_2(h) \leq a(h)$.

Nous avons aussi :

$$V(b(h), h) = -\frac{1}{h^{14}} \left(h^{12} + 3h^9 - 6h^6 + 4h^3 - 1 + 4h^{\frac{21}{2}} - 6h^{\frac{15}{2}} + 2h^{\frac{9}{2}} \right)$$

Pour étudier cette fraction rationnelle, on commence par décomposer le numérateur en somme de deux termes :

$$V(b(h), h) = -\frac{1}{h^{14}} \left(\underbrace{h^{12} + 3h^9 - 6h^6 + 4h^3 - 1}_{P_1(h)} + h^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{4h^{10} - 6h^7 + 2h^4}_{P_2(h)} \right) \right)$$

En remarquant que $P_1(h) = Q_1(h^3)$ avec $Q_1(h) = h^4 + 3h^3 - 6h^2 + 4h - 1$, il est facile de vérifier que ce terme est positif lorsque $h \geq 2$, ce qui implique que :

$$P_1(h) > 0$$

De la même manière, on peut écrire :

$$P_2(h) = h^4 \left(\underbrace{4h^6 - 6h^3 + 2}_{\tilde{P}_2(h)} \right)$$

et on remarque que $\tilde{P}_2(h) = Q_2(h^3)$ avec $Q_2(h) = 4h^2 - 6h + 2$. L'étude de ce dernier polynôme nous permet finalement d'obtenir que :

$$P_2(h) > 0$$

Nous pouvons donc en déduire que

$$V(b(h), h) < 0$$

Cela implique finalement que $b(h) \leq \alpha_2(h)$ puisque $b(h) > 0$.

5.4.4.2 Encadrement du zéro négatif

Nous allons démontrer que :

$$-a(h) \leq \alpha_1(h) \leq -b(h) \leq 0$$

Nous avons $V(-a(h), h) = \frac{1}{h^2} > 0$ et $-a(h) < 0$ donc $-a(h) \leq \alpha_1(h)$.

Nous avons aussi :

$$V(-b(h), h) = -\frac{1}{h^{14}} \left(h^{12} + 3h^9 - 6h^6 + 4h^3 - 1 - 4h^{\frac{21}{2}} + 6h^{\frac{15}{2}} - 2h^{\frac{9}{2}} \right)$$

Avec les notations précédentes, nous pouvons remarquer que nous avons :

$$V(-b(h), h) = -\frac{1}{h^{14}} \left(P_1(h) - \sqrt{h}P_2(h) \right)$$

Malheureusement, cette fois, les inégalités ne sont pas dans le bon sens. Nous allons donc utiliser une autre méthode pour démontrer que ce terme est négatif. Nous pouvons remarquer que l'on a :

$$h^{12} + 3h^9 - 6h^6 + 4h^3 - 1 - 4h^{\frac{21}{2}} + 6h^{\frac{15}{2}} - 2h^{\frac{9}{2}} = R\left(h^{\frac{3}{2}}\right)$$

avec :

$$R(h) = h^8 - 4h^7 + 3h^6 + 6h^5 - 6h^4 - 2h^3 + 4h^2 - 1$$

Pour étudier le signe de ce polynôme, nous allons calculer ses dérivées successives. La dérivée 7-ième de R est un polynôme de degré 1 qui s'annule en $\frac{1}{2}$, ce qui implique que pour $h \geq 2$, la dérivée 6-ième est croissante et elle donc minorée par :

$$R^{(6)}(2) = 42480 > 0$$

Cela implique que la dérivée 5-ième est croissante pour $h \geq 2$. Une nouvelle fois nous avons :

$$R^{(5)}(2) = 18480 > 0$$

Nous voyons donc que si toutes les dérivées de R sont positive en 2 alors la fonction R elle-même est croissante pour $h \geq 2$ et minorée par $R(2)$ et par un calcul simple, nous pouvons vérifier que c'est bien le cas. Nous pouvons donc en déduire que la fonction R est croissante pour $h \geq 2$ et elle est donc minorée par :

$$R(2) = 31 > 0$$

Remarquons enfin que dès que $h \geq 2$, nous avons $h^{\frac{3}{2}} \geq 2$ donc cela implique que :

$$V(-b(h), h) < 0$$

Ainsi nous obtenons :

$$\alpha_1(h) \leq -b(h)$$

5.4.4.3 Majoration de l'intégrale

Nous avons obtenu les encadrements suivants pour les zéros du potentiel :

$$-a(h) \leq \alpha_1(h) \leq -b(h) \leq 0 \text{ et } 0 \leq b(h) \leq \alpha_2(h) \leq a(h)$$

La première inégalité s'écrit aussi $0 \leq b(h) \leq -\alpha_1(h) \leq a(h)$.

Nous allons utiliser ces encadrements pour majorer la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx = -F_h(\alpha_1) - F_h(\alpha_2)$$

en rappelant que $F_h(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}hx^5 + \frac{1}{4}h^2x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2$. Nous avons :

$$-F_h(\alpha_1) = -\frac{1}{6}(-\alpha_1)^6 + \frac{2}{5}h(-\alpha_1)^5 - \frac{1}{4}h^2(-\alpha_1)^4 - \frac{2}{3}(-\alpha_1)^3 + \frac{1}{2}h(-\alpha_1)^2$$

donc :

$$-F_h(\alpha_1) \leq -\frac{1}{6}(b)^6 + \frac{2}{5}h(a)^5 - \frac{1}{4}h^2(b)^4 - \frac{2}{3}(b)^3 + \frac{1}{2}h(a)^2$$

De même, nous avons :

$$-F_h(\alpha_2) \leq -\frac{1}{6}(b)^6 - \frac{2}{5}h(b)^5 - \frac{1}{4}h^2(b)^4 + \frac{2}{3}(a)^3 + \frac{1}{2}h(a)^2$$

En ajoutant ces deux inégalités, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x)| dx \leq -\frac{1}{6}(b)^6 + \frac{2}{5}h(a)^5 - \frac{1}{4}h^2(b)^4 - \frac{2}{3}(b)^3 + \frac{1}{2}h(a)^2 - \frac{1}{6}(b)^6 - \frac{2}{5}h(b)^5 - \frac{1}{4}h^2(b)^4 + \frac{2}{3}(a)^3 + \frac{1}{2}h(a)^2$$

On note $I(h)$ le membre de droite de cette inégalité, c'est une fonction de h . Par définition, nous avons posé $a(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$ et $b(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}(1 - \frac{1}{h^3})$, ce qui nous donne :

$$I(h) = -\frac{1}{3h^3} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^6 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^4 - \frac{2}{3h\sqrt{h}} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^3 - \frac{2}{5h\sqrt{h}} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^5 + \frac{16}{15h\sqrt{h}} + 1$$

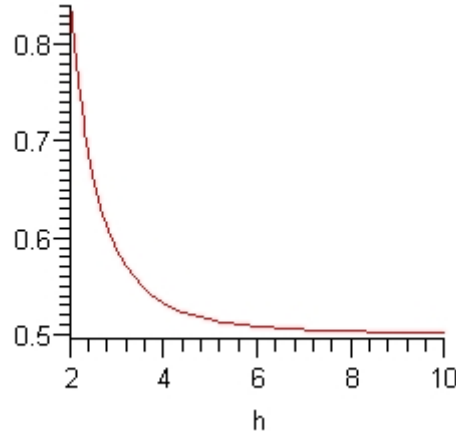


FIG. 5.2 – Graphe de la fonction $I(h)$ pour $h \in [2; 10]$

Nous allons démontrer que la fonction $I(h)$ est décroissante pour $h \geq 2$, ce qui nous permettra de la majorer par $I(2)$. Pour cela, calculons la dérivée de cette fonction :

$$\begin{aligned} I'(h) = & \frac{1}{h^4} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^3 \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^3 - 6}_A \right) - \frac{6}{h^7} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^5 - \frac{6}{h^{\frac{11}{2}}} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^2 \\ & + \frac{1}{h^{\frac{5}{2}}} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^3 + \frac{3}{5} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^5 - \frac{8}{5}}_B \right) - \frac{6}{h^{\frac{11}{2}}} \left(1 - \frac{1}{h^3}\right)^4 \end{aligned}$$

Comme $h \geq 2$, nous avons :

$$\frac{7}{8} \leq \left(1 - \frac{1}{h^3}\right) \leq 1$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$A \leq 1 - 6 = -5 < 0 \text{ et } B \leq 1 + \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \leq 0$$

Nous pouvons donc en déduire que $I'(h) < 0$, ce qui signifie que la fonction est décroissante et qu'elle est majorée par $I(2)$. On vérifie alors que :

$$I(2) \simeq 0,835 < 1$$

Remarque 5.4.2 *Il n'est pas nécessaire de calculer une valeur approchée de $I(2)$ car en utilisant la majoration $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$, nous pouvons majorer $I(2)$ par $\frac{26543419}{31457280} < 1$ puisque nous avons $I(2) = \frac{4329839}{6291456} + \frac{101963}{983040}\sqrt{2}$.*

Nous pouvons maintenant étudier le second cas.

5.4.5 Cas $0 \leq h \leq 2$

Commençons cette partie par une petite remarque. Le cas $h = 0$ peut-être traité directement. En effet, nous connaissons explicitement les zéros du potentiel $V(x, 0)$. Nous avons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x, 0)|dx = - \int_0^{2^{\frac{1}{3}}} xV(x, 0)dx$$

Un rapide calcul nous permet alors d'affirmer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xV_-(x, 0)|dx < 1$$

Nous allons restreindre l'étude qui suit à $0 < h \leq 2$ même si en fait, tout fonctionne aussi pour $h = 0$. L'intérêt d'enlever ce cas est d'obtenir des fonctions strictement monotones plutôt que simplement monotones.

Pour avoir une idée de la forme des zéros, nous allons étudier ce qu'il se passe lorsque h est très petit. Si c'est le cas, le potentiel peut être remplacé par $x^4 - 2x$ qui correspond à $V(x, 0)$ et on sait que ses racines sont $\left\{0, 2^{\frac{1}{3}}\right\}$. Nous pouvons donc penser que le zéro négatif va tendre vers 0 alors que le zéro positif va tendre vers $2^{\frac{1}{3}}$.

Pour le zéro négatif, nous allons chercher un encadrement de l'ordre de h . Pour le zéro positif, nous allons essayer de choisir un encadrement « affine » en déterminant une valeur approché du zéro positif pour $h = 2$.

5.4.5.1 Encadrement du zéro positif

Comme nous venons de le dire, nous allons essayer d'encadrer les zéros du potentiel par des fonctions affines. A l'aide d'une méthode de dichotomie par exemple, nous pouvons

vérifier que les zéros pour $h = 2$ sont approximativement $-0,62$ et $0,68$. Nous posons alors :

$$a_2(h) = -\frac{57}{200}h + \frac{63}{50} \text{ et } b_2(h) = -\frac{33}{100}h + \frac{6}{5}$$

Remarque 5.4.3 Nous aurions pu remplacer $\frac{63}{50}$ par $2^{\frac{1}{3}}$. Cependant, pour démontrer les inégalités qui suivent, il est plus simple de traiter des polynômes à coefficients rationnels.

Nous allons démontrer que :

$$0 \leq b(h) \leq \alpha_2(h) \leq a(h)$$

Nous avons :

$$V(a_2(h), h) = \frac{66438801}{1600000000}h^4 - \frac{22081059}{100000000}h^3 - \frac{17673957}{50000000}h^2 + \frac{8064521}{6250000}h + \frac{2961}{6250000}$$

Notons g_2 cette fonction. Il s'agit d'un polynôme de degré 4 et nous pouvons étudier son signe en étudiant son sens de variations. Sans entrer dans les détails, nous pouvons vérifier en calculant les dérivées successives de cette fonction qu'elle est croissante puis décroissante sur $[0; 2]$. En particulier, g_2 est minorée sur l'intervalle $[0; 2]$ par le minimum de ses valeurs en 0 et 2. Or nous avons :

$$g_2(0) = \frac{2961}{6250000} > 0 \text{ et } g_2(2) = \frac{6510721}{100000000} > 0$$

Nous pouvons donc en conclure que la fonction g_2 est positive sur l'intervalle $[0; 2]$. Comme de plus, $a_2(h) \geq 0$ sur $[0; 2]$, nous obtenons l'inégalité :

$$\alpha_2(h) \leq a(h)$$

Nous avons aussi :

$$V(b_2(h), h) = \frac{4888521}{100000000}h^4 - \frac{112761}{625000}h^3 - \frac{14697}{31250}h^2 + \frac{5219}{6250}h - \frac{204}{625}$$

Notons $f_2(h)$ cette fonction. En calculant les dérivées successives de cette fonction, nous pouvons vérifier que la dérivée seconde est négative sur $[0; 2]$ et donc la dérivée de f_2 est décroissante. D'autre part, nous avons :

$$f_2'\left(\frac{67}{100}\right) = \frac{516892693523}{25000000000000} > 0 \text{ et } f_2'\left(\frac{69}{100}\right) = -\frac{185826306811}{25000000000000} < 0$$

Nous pouvons donc en déduire que la fonction f_2' s'annule une fois et une seule dans l'intervalle $[0; 2]$ et qu'elle est positive puis négative. Cela implique que la fonction f_2 est croissante puis décroissante et qu'elle atteint son maximum pour une valeur appartenant à l'intervalle $\left[\frac{67}{100}; \frac{69}{100}\right]$. Or sur cet intervalle, nous pouvons majorer la fonction par :

$$M = \frac{66438801}{16000000000} \left(\frac{69}{100}\right)^4 - \frac{22081059}{1000000000} \left(\frac{67}{100}\right)^3 - \frac{17673957}{50000000} \left(\frac{67}{100}\right)^2 + \frac{8064521}{6250000} \left(\frac{69}{100}\right) + \frac{2961}{6250000}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$M = -\frac{45239345269959}{10000000000000000} < 0$$

Nous pouvons donc en conclure que la fonction est négative sur l'intervalle $[0; 2]$. Comme de plus $b_2(h) \geq 0$, nous obtenons l'inégalité :

$$b_2(h) \leq \alpha_2(h)$$

Remarque 5.4.4 *Nous pouvons nous interroger sur la pertinence du choix du minorant du zéro positif dans ce cas. Si l'on étudie le graphe de la fonction $V(b_2(h), h)$, on constate que l'erreur au voisinage de 2 devient relativement grande (plus grande que 1!). En fait, il est tout à fait possible d'obtenir des fonctions (même affines) qui donneront une erreur un peu plus importante en 0 mais bien plus petite en 2. Cependant, j'ai constaté que si l'on choisissait de telles fonctions, l'approximation finale pour l'intégrale était moins bonne. Plus exactement, c'est pour $h = 0$ que l'on obtient le majorant le plus élevé. Cela explique donc ce choix pour la fonction minorante.*

5.4.5.2 Encadrement du zéro négatif

Posons maintenant :

$$a_1(h) = \frac{1}{5}h + \frac{31}{100} \text{ et } b_1(h) = \frac{31}{100}h$$

Nous allons démontrer que :

$$-a_1(h) \leq \alpha_1(h) \leq -b_1(h)$$

Nous avons :

$$V(-a_1(h), h) = \frac{16}{625}h^4 + \frac{186}{3125}h^3 + \frac{961}{250000}h^2 - \frac{1589373}{2500000}h + \frac{62923521}{100000000}$$

En procédant de manière similaire à l'étude des fonctions précédentes, nous pouvons démontrer que cette fonction est croissante puis décroissante et qu'elle atteint son minimum pour une valeur appartenant à l'intervalle $\left[\frac{139}{100}, \frac{140}{100}\right]$. Or sur cet intervalle, nous pouvons minorer la fonction par :

$$M = \frac{16}{625} \left(\frac{139}{100}\right)^4 + \frac{186}{3125} \left(\frac{139}{100}\right)^3 + \frac{961}{250000} \left(\frac{139}{100}\right)^2 - \frac{1589373}{2500000} \left(\frac{14}{10}\right) + \frac{62923521}{100000000}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$M = \frac{63325993}{3125000000} > 0$$

Nous pouvons donc en conclure que la fonction est positive sur l'intervalle $[0; 2]$. Comme, de plus, $-a_1(h) \leq 0$, nous obtenons l'inégalité :

$$-a_1(h) \leq \alpha_1(h)$$

Nous avons aussi :

$$V(-b_1(h), h) = \frac{4575321}{100000000}h^4 - \frac{19}{50}h$$

Encore une fois, il s'agit d'un polynôme de degré 4 et nous pouvons démontrer que cette fonction est décroissante puis croissante. En particulier, elle est majorée sur l'intervalle $[0; 2]$ par le maximum de ses valeurs en 0 et 2. Si nous notons f_1 cette fonction, nous avons :

$$f_1(0) = 0 \text{ et } f_1(2) = -\frac{174679}{6250000} \leq 0$$

Nous pouvons donc en conclure que la fonction f_1 est négative sur l'intervalle $[0; 2]$. Comme de plus, $-b_1(h) \leq 0$ sur $[0; 2]$, nous obtenons l'inégalité :

$$\alpha_2(h) \leq -b_1(h)$$

Nous venons donc d'obtenir les deux encadrements sur les zéros du potentiel. Nous pouvons maintenant nous intéresser à la majoration de l'intégrale.

5.4.5.3 Majoration de l'intégrale

Contrairement au cas $h \geq 2$, nous n'allons pas majorer directement la fonction $I(h)$. En effet, dans le cas $h \geq 2$, on pouvait facilement vérifier que la fonction était décroissante et donc que le maximum de la fonction I était donné par sa valeur en 2 mais dans ce cas, le graphe de la fonction I est le suivant :

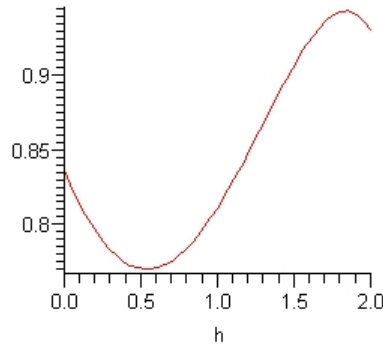


FIG. 5.3 – Graphe de la fonction I pour $h \in [0; 2]$

D'après le choix des fonctions a_i et b_i , nous savons que la fonction I est un polynôme de degré 6. Nous pourrions donc en faire l'étude directement. Malheureusement, nous serions obligé de calculer une valeur approchée des racines de la dérivée de I pour obtenir une valeur approchée du maximum. Préférant une démonstration plus rigoureuse, nous allons étudier séparément les deux fonctions I_1, I_2 .

L'étude graphique de ces fonctions nous permet de remarquer que l'une est croissante et l'autre décroissante.

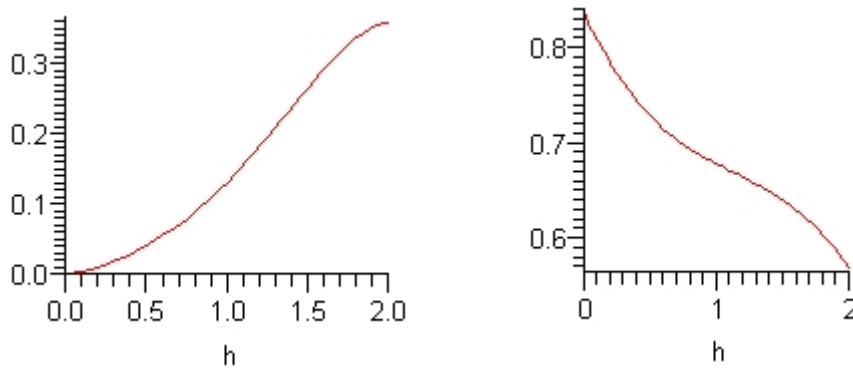


FIG. 5.4 – Graphe des fonctions I_1 et I_2 sur $[0; 2]$

Dans un premier temps, nous allons démontrer ces résultats puis nous montrerons comment conclure grâce à ces informations.

Commençons par vérifier la croissance de la fonction I_1 . Nous avons :

$$I_1(h) = -\frac{15508318681}{6000000000000}h^6 - \frac{31}{31250}h^5 - \frac{961}{312500}h^4 + \frac{1316029}{37500000}h^3 + \frac{14576479}{250000000}h^2 + \frac{1172620849}{25000000000}h$$

Pour étudier le sens de variations de cette fonction polynomiale, il suffit de calculer ses dérivées successives. Nous ne détaillons pas tous les calculs. En étudiant le sens des variations des différentes dérivées, nous pouvons démontrer que la dérivée de I_1 est croissante puis décroissante, ce qui nous permet de la minorer simplement et de vérifier qu'elle est strictement positive sur $[0; 2]$, ce qui implique que la fonction I_1 est croissante sur cet intervalle.

Intéressons nous maintenant à la décroissance de la fonction I_2 . Nous avons

$$I_2(h) = -\frac{3229262883}{20000000000000}h^6 + \frac{483963579}{250000000000}h^5 - \frac{17730009}{2500000000}h^4 + \frac{4970007}{100000000}h^3 + \frac{656127}{5000000}h^2 - \frac{356643}{1250000}h + \frac{10449}{12500}$$

Comme pour I_1 , pour étudier cette fonction, il faut calculer ses dérivées successives. Encore une fois, nous ne détaillons pas les calculs. Nous pouvons démontrer que la dérivée de I_2 est croissante puis décroissante dans l'intervalle $[0; 2]$ et qu'elle atteint son maximum dans l'intervalle $\left[\frac{111}{100}; \frac{112}{100}\right]$. Or sur cet intervalle, on peut facilement majorer cette fonction par une constante strictement négative. Nous pouvons donc en déduire que la dérivée de I_2 est négative sur l'intervalle $[0; 2]$, ce qui implique que la fonction I_2 est décroissante sur cet intervalle.

D'après ce qui précède, nous pouvons donc majorer la fonction I_1 par sa valeur en 2 et la fonction I_2 par sa valeur en 0. Cela nous permet ainsi de majorer la fonction I par :

$$I_1(2) + I_2(0)$$

Malheureusement, nous pouvons vérifier que $I_1(2) + I_2(0) > 1$, cela ne nous donne donc pas un majorant suffisant.

Nous allons tout de même réussir à majorer convenablement la fonction I en utilisant les propriétés de croissance et de décroissance des fonctions I_1 et I_2 . Pour cela, nous découpons l'intervalle $[0; 2]$ en trois intervalles de la manière suivante :

$$[0; 2] = [0; 1] \cup \left[1; \frac{33}{20}\right] \cup \left[\frac{33}{20}; 2\right]$$

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction I est majorée par

$$I_1(1) + I_2(0) = \frac{1939145873693}{2000000000000} < 1$$

Sur l'intervalle $\left[1; \frac{33}{20}\right]$, elle est majorée par

$$I_1\left(\frac{33}{20}\right) + I_2(1) = \frac{126086396761028057037}{128000000000000000000} < 1$$

Enfin, sur l'intervalle $\left[\frac{33}{20}; 2\right]$, elle est majorée par

$$I_1(2) + I_2\left(\frac{33}{20}\right) = \frac{378469573878911741719}{384000000000000000000} < 1$$

Nous pouvons donc en conclure que sur l'intervalle $[0; 2]$, la fonction I est majorée par le maximum des trois majorants obtenus par le découpage. En particulier, ce majorant sera strictement plus petit que 1, ce que l'on cherchait à démontrer.

Remarque 5.4.5

1. Une étude directe de la fonction I nous permettrait d'obtenir un majorant plus précis qui vaut environ 0.944 alors que le maximum des trois majorants précédents est d'environ 0.986.

2. Nous pouvons encore réduire le majorant de deux manières. La première solution consiste à découper dès le début l'intervalle $[0; 2]$ en plusieurs intervalles et à chercher pour chacun des intervalles un encadrement des zéros. L'autre solution qui peut se combiner à la première consiste à ne considérer non plus seulement des fonctions affines pour les fonctions a_i, b_i mais aussi des fonctions puissances voire même logarithmes ou exponentielles. L'inconvénient de ces choix est que les expressions des fonctions $V(a_i(h), h), V(b_i(h), h)$ ainsi que des fonctions I, I_1, I_2 deviennent beaucoup plus compliquées.

5.5 Spectre de $H_1^q(\tau)$

Comme nous l'avons déjà précisé, pour passer du spectre de l'opérateur associé au potentiel $V(u, h)$ au spectre de l'opérateur initial $H_1^q(\tau)$, il suffit de multiplier chaque valeur propre par $\tau^{\frac{2}{3}}$. En tenant compte de ce coefficient, l'étude précédente nous permet d'affirmer qu'il n'y a au plus qu'une valeur propre de l'opérateur H_1^q qui est négative ou nulle. Plus précisément, comme nous avons tenu compte de la multiplicité des valeurs propres, cela revient à dire qu'il n'admet au plus qu'un vecteur propre associé à une valeur propre négative, les autres fonctions propres étant associées à des valeurs propres strictement positives. De plus, nous savons que les autres valeurs propres sont au moins plus grandes que $C\tau^{\frac{2}{3}}$ avec C une constante. Tout cela étant valable dès que τ est plus grand qu'un certain τ_0 .

D'autre part, les points étudiés étant de Morse, il existe au moins un état de basse énergie, ce qui nous permet d'affirmer qu'il en existe exactement un.

Enfin, nous savons que les formes propres associées à des états de basse énergie sont localisées au voisinage des points critiques. Nous pouvons même dire que la décroissance est exponentielle par rapport au point critique. Ainsi, comme dans le cas des points de Morse loin de la caustique, nous pouvons couper la fonction de sorte à ce qu'elle soit à support compact et que son énergie soit encore majorée par une constante.

Nous allons résumer ces résultats sous forme d'une proposition.

Proposition 5.5.1 *Il existe τ_0 et pour tout $\tau \geq \tau_0$, une forme η_0 à support compact telle que pour toute forme η de $H^1([-1; 1])$ orthogonale à η_0 , on ait :*

$$Q_{\tau,t}^q(\eta) \geq C\tau^{\frac{2}{3}} \|\eta\|_2^2$$

où C est une constante indépendante de τ et de t .

A. Connes et T. Fack avaient déjà démontré qu'il existait un nombre fini d de telles formes avec d indépendant des feuilles (Cf. [17]). Nous venons finalement de démontrer que

$d = 1$. Cela va alors nous permettre de démontrer que les formes $\omega_{\tau, c_i^q, L}$ que nous avons définies dans des cartes de Morse peuvent être étendues aux cartes de type naissance-mort.

Avant de passer à l'étude de la deuxième partie de l'opérateur, nous pouvons remarquer que la forme η_0 n'a de sens que sur les plaques P_t avec $t \geq 0$. En effet, comme nous l'avons précisé, l'opérateur n'a pas d'états propres associés à des valeurs propres de basse énergie pour $t < 0$. En fait, sur ces plaques, la proposition est encore vraie mais cela n'est pas utile car nous souhaitons associer une forme à chaque point critique et d'après nos hypothèses, il n'y en a pas sur les plaques P_t avec $t < 0$, nous n'aurons donc pas à considérer ce cas.

5.6 Etude du spectre de l'opérateur $H_2^q(\tau)$

Comme pour l'opérateur $H_1^q(\tau)$ nous allons nous intéresser à la forme quadratique associée à l'opérateur $H_2^q(\tau)$ qui est définie pour toute fonction g dans $H^1([-1; 1]^{p-1})$ par :

$$R_\tau(g) = \int_{[-1; 1]^{p-1}} \sum_{i=2}^p \left[\left| \frac{\partial^2 g}{(\partial u^i)^2} \right|^2 + \tau^2 (u^i)^2 |g|^2 + \tau \varepsilon_i \varepsilon_i^J |g|^2 \right] du^1 \dots du^p$$

avec $\varepsilon_i^J = 1$ si $i \in J$ et -1 sinon, où la q -forme considérée est $g du^J$.

Une nouvelle fois, le résultat de *Reed-Simon* [65] que nous avons utilisé pour décomposer l'opérateur initial, nous permet d'affirmer que le spectre de l'opérateur $H_2^q(\tau)$ peut être obtenu comme la somme des spectres de l'opérateur associé à chaque coordonnées :

$$\sigma(H_q^2(\tau)) = \sum_{i=2}^p \sigma(H_{q,i}^2(\tau))$$

avec $H_{q,i}^2(\tau)$ l'opérateur de Neumann associé à la forme quadratique :

$$R_{\tau, \varepsilon}(g) = \int_{-1}^1 \left[|g'(u)|^2 + (\tau^2 u^2 + \tau \varepsilon) |g(u)|^2 \right] du$$

sur $H^1([-1; 1])$ et avec $\varepsilon = \varepsilon_i \varepsilon_i^J$.

Encore une fois, comme pour l'étude de $H_1^q(\tau)$, nous allons définir un unitaire U pour modifier cette forme quadratique et en simplifier l'étude. Définissons l'opérateur U en posant :

$$(Uf)(x) = \tau^{\frac{1}{4}} f\left(\tau^{\frac{1}{2}} x\right)$$

Cet opérateur nous définit une isométrie de $L^2([-1; 1], du)$ dans $L^2([- \tau^{\frac{1}{2}}; \tau^{\frac{1}{2}}, \tau^{\frac{1}{2}} du])$. L'image de $R_{\tau, \varepsilon}$ par cet opérateur définit une nouvelle forme quadratique que nous notons encore $R_{\tau, \varepsilon}$:

$$R_{\tau, \varepsilon}(h) = \tau \int_{-\tau^{\frac{1}{2}}}^{\tau^{\frac{1}{2}}} \left[|h'(u)|^2 + (u^2 + \varepsilon) |g(u)|^2 \right] du$$

pour $h \in H^1(\cdot - \tau^{\frac{1}{2}}; \tau^{\frac{1}{2}}[\cdot])$. L'opérateur de Neumann associé à cette forme quadratique est l'opérateur :

$$K_{\tau,\varepsilon} = \tau \left[-\frac{d^2}{du^2} + (u^2 + \varepsilon) \right]$$

sur $L^2(\cdot - \tau^{\frac{1}{2}}; \tau^{\frac{1}{2}}[\cdot], du)$.

Nous connaissons les valeurs propres de cet opérateur. Au coefficient multiplicatif τ près et à la constante ε près, il s'agit en effet de l'opérateur associé à un oscillateur harmonique quantique du type :

$$-\frac{d^2}{du^2} + a^2 u^2$$

dont les valeurs propres pour le problème sur $L^2(\mathbb{R})$ sont données par :

$$\lambda_n = a(2n + 1)$$

En particulier, les valeurs propres de l'opérateur $K_{\tau,\varepsilon}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ sont :

$$\lambda_n = \tau(2n + 1 + \varepsilon)$$

Notons alors $E_n = E_n(\tau, \varepsilon)$ la n -ième valeur propre de l'opérateur $K_{\tau,\varepsilon}$ pour le problème sur $L^2(\cdot - \tau^{\frac{1}{2}}; \tau^{\frac{1}{2}}[\cdot], du)$. Comme nous l'avons déjà remarqué lors de l'étude de $H_1^q(\tau)$, nous savons que pour le problème sur $L^2(\cdot - a; a[\cdot])$ avec a suffisamment grand, les valeurs propres correspondantes au problème sur $L^2(\cdot - a; a[\cdot])$ pour le problème de Neumann que nous notons $E_n^N(a)$ vérifient :

$$E_n - e^{-Ka^2} \leq E_n^N(a) \leq E_n$$

En particulier, cela signifie que pour τ suffisamment grand ($\tau \geq \tau_0$) :

$$\tau(2n + 1 + \varepsilon) - e^{-K\tau} \leq E_n \leq \tau(2n + 1 + \varepsilon)$$

Cette inégalité nous permet alors d'affirmer l'existence d'un τ_1 et pour tout $\tau \geq \tau_1$ d'un sous espace F de $\mathcal{C}_c(\cdot - 1; 1[\cdot])$ de dimension 1 tel que pour toute fonction f dans $H^1(\cdot - 1; 1[p^{-1}])$ orthogonale à F , on ait :

$$R_\tau(f) \geq \tau \|f\|^2$$

5.7 Passage de la métrique plate à la métrique ambiante

En combinant les deux résultats obtenus grâce à l'étude des spectres des opérateurs $H_1^q(\tau)$ et $H_2^q(\tau)$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 5.7.1 *Il existe $\tilde{\tau}$ et un espace R de dimension 1 engendré par une forme ω_0 à support compact tel que pour toute forme ω orthogonale à cet espace, on ait :*

$$\langle \Delta_\tau \omega, \omega \rangle \geq C \tau^{\frac{2}{3}}$$

dès que $\tau \geq \tilde{\tau}$.

Remarque 5.7.1 *Nous pouvons supposer la constante $C = 1$. Ce résultat a en effet été vérifiée par A. Connes et T. Fack dans [17]. Nous ne détaillons pas la démonstration qui repose sur une petite astuce de calcul.*

Par contre, d'après le choix de la métrique sur la variété M , nous savons que la métrique considérée sur les cartes de type naissance-mort n'est pas la métrique plate. Or le résultat précédent n'est valable que pour la métrique plate. Il faut donc justifier le passage de la métrique plate à la métrique ambiante. Ce travail a déjà été fait dans [17] par A. Connes et T. Fack. La démonstration n'étant pas très longue, nous la reprenons dans ce qui suit.

Notons $g_t = g_{t,\varepsilon}$, respectivement \tilde{g}_t , la métrique induite par la métrique ambiante g_ε , respectivement la métrique plate, sur la plaque $P_t = U \times \{t\}$. Les espaces de Hilbert correspondants sont notés :

$$L_t^2 = L^2(P_t, \Lambda T^*U, g_t) \text{ et } \tilde{L}_t^2 = L^2(P_t, \Lambda T^*U, \tilde{g}_t)$$

Comme g_ε est de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}$ sur $U \times T$, il existe un champ continu d'opérateurs bornés :

$$A = (A_{u,t})_{(u,t) \in U \times T} \in \mathcal{C}_b(U \times T, \text{End}(T^*U))$$

vérifiant :

1. $A_{u,t} \geq 0$ pour la métrique $\tilde{g}_t(u)$;
2. $g_t(u)(\omega_1; \omega_2) = \tilde{g}_t(A_{u,t}\omega_1; A_{u,t}\omega_2)$ pour tout couple ω_1, ω_2 dans $T_{(u,t)}^*(U)$;
3. A est inversible et $A \in \mathcal{C}_b(U \times T, \text{End}(T^*U))$.

Notons alors $V = (V_t)_{t \in T}$ le champ d'opérateurs bornés $V_t : L_t^2 \rightarrow \tilde{L}_t^2$ défini pour ω appartenant à $L^2(P_t, \Lambda T^q U, g_t)$ (avec $0 \leq q \leq p$) par :

$$(V_t \omega)(u) = \det(A_{u,t})^{-\frac{1}{2}} \Lambda^q(A_{u,t})(\omega(u))$$

Nous définissons de cette manière un champ continu d'isométries $V_t : L_t^2 \rightarrow \tilde{L}_t^2$.

Notons maintenant $\Delta_{\tau,t}$ et $\widetilde{\Delta}_{\tau,t}$ les Laplaciens de Witten associés à chacune des métriques sur la plaque P_t . Nous avons par définition :

$$\Delta_{\tau,t} = (d_{\tau,t} + \delta_{\tau,t})^2 \text{ et } \widetilde{\Delta}_{\tau,t} = (d_{\tau,t} + \tilde{\delta}_{\tau,t})^2$$

avec $\delta_{\tau,t}$, respectivement $\tilde{\delta}_{\tau,t}$, l'adjoint de la fermeture de $d_{\tau,t}$ pour la métrique g_t , respectivement \tilde{g}_t . D'après Hilsum [49], il existe un champ continu $B = (B_t)_{t \in T}$ d'opérateurs bornés $B_t : L_t^2 \rightarrow \tilde{L}_t^2$ vérifiant :

$$B_t^*(d_{\tau,t} + \tilde{\delta}_{\tau,t})B_t = d_{\tau,t} + \delta_{\tau,t} (t \in T)$$

Le résultat que nous venons de démontrer signifie qu'il existe un sous-espace F de formes de dimension 1 engendré par une forme f_0 à support compact tel que toute forme d dans \widetilde{L}_t^2 orthogonale à cet espace (*i.e.* : à cette forme) vérifie :

$$\langle \widetilde{\Delta_{\tau,t}} f; f \rangle \geq C \tau^{\frac{2}{3}} \|f\|^2$$

pour une certaine constante C . Posons alors $\omega_0 = B_t^*(f_0)$. Nous définissons ainsi une q -forme dans L_t^2 dépendant continûment du paramètre transverse t . Pour toute forme ω orthogonale à ω_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\Delta_{\tau,t}} \omega; \omega \rangle &= \|(d_{\tau,t} + \delta_{\tau,t})\omega\|^2 \\ &= \|B_t^*(d_{\tau,t} + \widetilde{\delta_{\tau,t}} B_t \omega)\|^2 \\ &\geq \|(B_t^*)^{-1}\|^2 \|(d_{\tau,t} + \widetilde{\delta_{\tau,t}} B_t \omega)\|^2 \\ &\geq \|(B_t^*)^{-1}\|^2 C \tau^{\frac{2}{3}} \|B_t \omega\|^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $B_t \omega$ est orthogonale à f_0 . Nous en concluons donc que :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\Delta_{\tau,t}} \omega; \omega \rangle &\geq C \tau^{\frac{2}{3}} \|(B_t^*)^{-1}\|^2 \|B_t\|^2 \|\omega\|^2 \\ &\geq D \tau^{\frac{2}{3}} \|\omega\|^2 \end{aligned}$$

où D est une constante positive indépendante des feuilles.

Finalement, cela signifie que la proposition 5.7.1 est valable pour la métrique considérée dans notre cadre d'étude.

5.8 Isomorphisme entre $l^2(C^q)$ et W_τ^q

La proposition 5.7.1 nous donne l'existence d'une forme ω_0 qui est une forme propre approchée du Laplacien Δ_τ associé à l'état de plus basse énergie. Cette forme est localisée au voisinage d'un point critique c et comme pour les formes $\omega_{c,\tau}$, il est possible de les arranger en un champ de Borel de formes continues. De plus, quitte à réduire les supports et à normaliser ces formes, nous pouvons de nouveau obtenir une famille orthonormale de formes. Cela revient à généraliser la proposition 5.2.3.

Proposition 5.8.1 *Il existe un champ de Borel de formes continues $\omega_{c,\tau}$:*

$$\omega_\tau : c \in C^q \rightarrow \omega_{c,\tau} \in \mathcal{C}_C^\infty(L_x, \Lambda^q T^* \mathcal{F})$$

et τ_0 tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, ces formes constituent une famille orthonormale et vérifient :

$$\langle \Delta_\tau^q \omega_{c,\tau}; \omega_{c,\tau} \rangle < A \|\omega_{c,\tau}\|_2^2$$

Par analogie, nous introduisons les notations suivantes.

Notations 5.8.1 Notons $W_{\tau,L}^q$ le sous-espace vectoriel de $L^2(L, \Lambda^q T^* \mathcal{F})$ engendré par les formes $\omega_{x,\tau}$ et $W_\tau^q = \{W_{\tau,L}^q\}$ le champ associé.

Remarque 5.8.1 D'après la définition des formes $\omega_{c,\tau}$, nous avons clairement :

$$W_\tau^q = \text{Im } E_{]-\infty; A]}(\Delta_\tau^q)$$

En particulier, à tout point critique x d'indice q n'appartenant pas à la caustique Γ , nous pouvons associer une forme propre approchée $\omega_{x,\tau}$ correspondante à un état de basse énergie. Cette identification est bijective car les formes sont localisées au voisinage des points critiques et pour un indice fixé, il est possible d'isoler tous les points critiques à une distance 2δ indépendamment des feuilles. Les formes $\omega_{c,\tau}$ constituant un champ mesurable, cela induit un isomorphisme de champ mesurable entre $l^2(C^q)$ et W_τ^q . Nous connaissons même la forme explicite de cet isomorphisme et nous résumons ce résultat par le théorème suivant.

Théorème 5.8.1 Les champs $l^2(C^q) = (l^2(C^q \cap L))_L$ et $W_\tau^q = (W_{\tau,L}^q)_L$ sont mesurablement isomorphes. Pour chaque feuille L , l'isomorphisme est défini par l'application suivante :

$$\begin{aligned} U_{\tau,L}^q : \quad l^2(C^q \cap L) &\rightarrow W_{\tau,L}^q \\ x = \sum_{k \geq 1} \lambda_k c_k^q &\mapsto \omega_{x,\tau} = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \omega_{c_k^q, \tau} \end{aligned} \quad (5.3)$$

De plus, par définition, cette application est une isométrie.

Ce résultat nous permet d'identifier complètement les champs $l^2(C^q)$ et W_τ^q . Cela signifie donc que les modules des complexes de Witten et d'orientation feuilleté sont isomorphes. Pour montrer que les complexes calculent la même cohomologie, il suffit d'étudier les opérateurs associés. Pour cela, nous allons utiliser la base adaptée que nous avons exhibée et nous déterminerons l'action de l'opérateur dans cette base.

Chapitre 6

Déformation des complexes de Witten et d'orientation

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il y a une identification naturelle entre $l^2(C^k \cap L)$ et $\text{Im } E_{]-\infty; A]}(\Delta_{\tau, L})$ donnée par l'application $U_{\tau, L}^q : c_L^q \mapsto \omega_{c_L^q, L}$.

Pour démontrer que le complexe de Witten feuilleté et le complexe d'orientation feuilleté calculent la même cohomologie, nous allons démontrer que l'action des opérateurs associés modulo l'identification des modules est la même. Nous verrons qu'il suffit de déterminer pour toute feuille L , une approximation d'ordre $\frac{1}{\tau}$ pour tout point critique x d'indice q et y d'indice $q + 1$ entre $\langle (U_{\tau, L}^{q+1})^{-1} d_{\tau, L}^q (U_{\tau, L}^q)x; y \rangle$ et $\langle \delta_L^q x; y \rangle$, l'approximation devant être valable indépendamment de la feuille L .

Si cela se montre sans trop de peine dans les cartes de Morse en utilisant des modèles locaux, il n'en est plus de même lorsqu'on se rapproche des points critiques dégénérés. En effet, il n'est alors plus possible d'isoler les points d'indice q et $q + 1$, ce qui interdit l'utilisation des modèles locaux.

Une première solution pour résoudre ce problème consiste à suivre, lorsqu'on se rapproche de la caustique Γ , les calculs de l'action de l'opérateur le long de C^q dans les modèles locaux. Cela conduit à de longues justifications techniques que nous avons cherché à éviter en effectuant une déformation de la fonction initiale dont le but est de faire disparaître les points critiques dégénérés.

Comme la nouvelle fonction que nous considérons présente une discontinuité dans le sens transverse pour chaque plaque contenant un point critique dégénéré dans une carte de type naissance-mort, il nous faut vérifier que tous les résultats antérieurement établis pour des fonctions \mathcal{C}^∞ transversalement demeurent. Il faut aussi construire l'analogue des complexes de Witten et d'orientation. Enfin, il faut vérifier que ces nouveaux complexes calculent bien la même cohomologie que ceux associés à la fonction non déformée.

6.1 Déformation de la variété

Commençons par définir la déformation dans le cas général. Nous illustrerons ensuite cette déformation dans le cas de la situation modèle en dimension 3 en définissant explicitement les fonctions considérées.

La déformation que nous allons construire n'affectera qu'un voisinage de la caustique et il suffit donc de la définir dans des cartes de types naissances-mort uniquement.

Considérons alors un point critique de naissance-mort d'indice q et une carte $\Omega = U \times T$ de type naissance-mort, centrée en ce point, que nous pouvons supposer de la forme $] - 1; 1[\times] - 1; 1[^{n-p}$. Dans cette carte Ω , la fonction a la forme normale suivante (Cf. section 2.2.2) :

$$f(x, y, t) = f(0, t) + \frac{x_1^3}{3} - t_1 x_1 + \sum_{i=2}^q \frac{x_i^2}{2} - \sum_{i=q+1}^{n-p} \frac{x_i^2}{2}$$

La variété critique dépend du paramètre transverse t . Nous avons même la forme explicite de cette variété dans la carte locale :

$$\Sigma \cap \Omega = \{ (\pm\sqrt{t_1}, 0, \dots, 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \in U \times T / t_1 \in [0; 1[, (t_2, \dots, t_{n-p}) \in] - 1; 1[^{n-p-1} \}$$

Plus précisément, nous connaissons la forme explicite des variétés critiques d'indice q et $q+1$:

$$\begin{aligned} - C^q \cap \Omega &= \{ (\sqrt{t_1}, 0, \dots, 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \in U \times T / t_1 \in]0; 1[, (t_2, \dots, t_{n-p}) \in] - 1; 1[^{n-p-1} \} \\ - C^{q+1} \cap \Omega &= \{ (-\sqrt{t_1}, 0, \dots, 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-p}) \in U \times T / t_1 \in]0; 1[, (t_2, \dots, t_{n-p}) \in] - 1; 1[^{n-p-1} \} \end{aligned}$$

Dans leurs articles (Cf. [38] et [9]), *J. L. Heitsch* et *C. Lazarov* ainsi que *D. Castelvecchi* donnent l'existence d'une application adaptée pour déformer le feuilletage mais ne la définissent pas explicitement. Comme nous l'avons déjà précisé, nous choisissons d'en donner une version explicite.

Avant cela, nous devons définir des ensembles appropriés qui nous permettront de construire la déformation. Au vu de la forme de la variété critique, nous pouvons supposer (quitte à réduire la carte considérée) que chaque plaque coupe exactement la variété critique en deux points pour $t > 0$ et en aucun point pour $t < 0$.

Le cas $t = 0$ correspond à la feuille critique et la variété critique n'a donc qu'un point d'intersection avec cette plaque. Le point critique dégénéré étant d'indice q , les plaques contenant des points critiques contiendront un point d'indice q et un point d'indice $q+1$. Nous noterons c_t^q et c_t^{q+1} les points critiques de la plaque P_t d'indice q et $q+1$ respectivement.

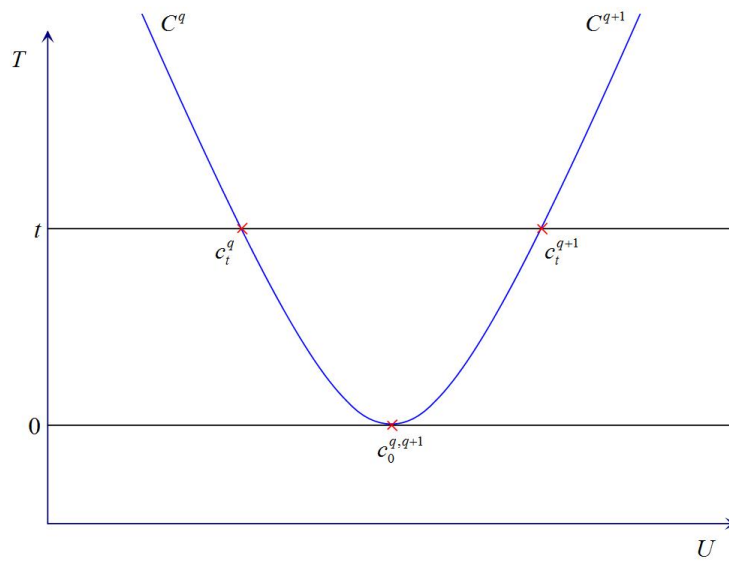


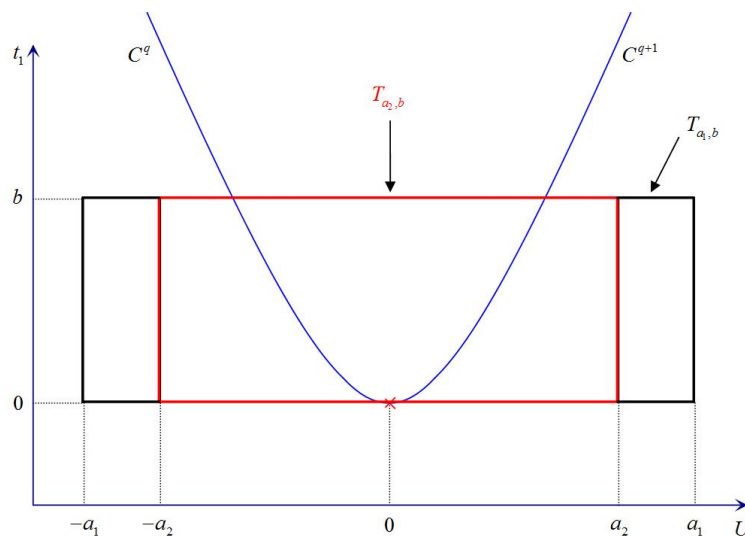
FIG. 6.1 – Forme locale de la variété critique

Définissons maintenant le sous-ensemble de Ω suivant :

$$T_{a,b} = \{u \in U / d_{Agmon}((u, 0), (0, 0)) \leq a\} \times [0; b] \times \{-1; 1\}^{n-p-1}$$

avec $a > 0, b > 0$. Il s'agit d'une sous variété de M contenue dans la carte $U \times T$ et contenant un voisinage de la caustique Γ . D'après la forme de la variété critique dans la carte locale, nous pouvons trouver $a_1 > a_2$ et b tels que l'on ait :

- $\Sigma \cap (T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}) = \emptyset$;
- Pour toute plaque $P_{(t_1,t')}$ avec $t_1 \in]0; b]$, on a $\#(\Sigma \cap P_{(t_1,t')} \cap T_{a_2,b}) = 2$.

FIG. 6.2 – Les ensembles $T_{a_1,b}$ et $T_{a_2,b}$

On rajoute aussi la condition que $T_{a_2,b}$ contienne le voisinage tubulaire N_δ de la variété critique que nous avons déjà défini. Cela est possible quitte à réduire la valeur de b , en conservant les valeurs de a_1, a_2 fixées. Commençons par choisir une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , notée θ , positive, valant 1 sur $[-a_2; a_2]$ et nulle en dehors de $[-a_1; a_1]$. Il s'agit simplement d'une approximation d'un échelon unité centré en 0. On définit alors l'application α de la manière suivante :

$$\alpha(u, t) = (u, \tilde{\alpha}(u, t)) \text{ avec } \tilde{\alpha}(u, t) = \begin{cases} t & \text{si } (u, t) \notin T_{a_1,b} \\ \left(\frac{t_1+b}{2}; t_2; \dots; t_{n-p}\right) & \text{si } (u, t) \in T_{a_2,b} \\ \left(\theta(\|u\|^2) \left(\frac{-t_1+b}{2}\right); t_2; \dots; t_{n-p}\right) & \text{si } t \in T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b} \end{cases}$$

avec $\|u\| = d_{Agmon}((u, 0), (0, 0))$. En particulier, $\alpha = Id$ en dehors de $T_{a_1,b}$.

La déformation α transforme le feuilletage en une structure qui n'est plus un feuilletage de la variété car le fait d'écarter les feuilles « au dessus » d'une feuille critique des feuilles situées « en dessous » dégage une portion de la variété qui n'est plus feuilletée et qui n'est d'ailleurs ni ouverte ni fermée. Cela n'est pas gênant pour la suite, car ce qui comptera c'est la déformation en tant qu'application de M dans M .

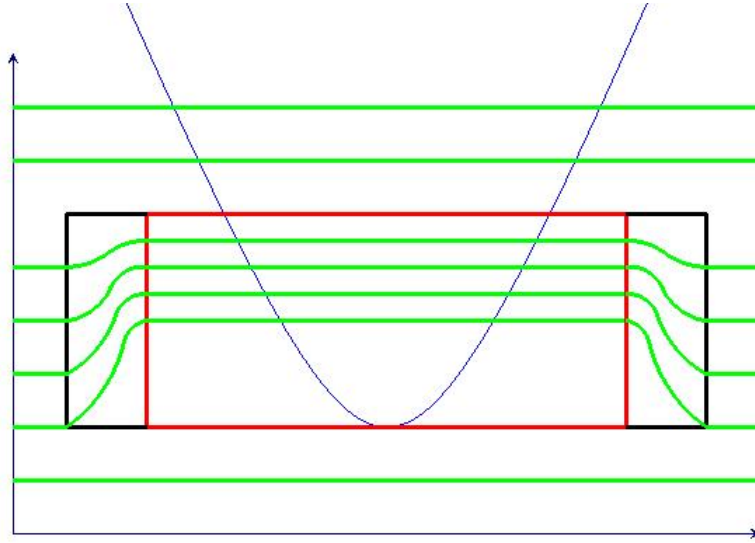


FIG. 6.3 – Image du feuilletage par la déformation α

Connaissant maintenant la fonction α sous forme explicite, nous pouvons étudier ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées longitudinales. Tout d'abord, il est clair que :

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{si } j \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ en dehors de } T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$$

Sur $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$, nous avons :

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{si } j \leq p \\ \left(\frac{-t_1+b}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u_i} (\theta \circ \|\cdot\|^2)(u, t) & \text{si } j = p+1 \\ 0 & \text{si } j > p+1 \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin dans l'étude des propriétés de l'application α , nous allons en donner une représentation dans le cas d'une situation modèle avec \mathbb{R}^3 feuilleté par \mathbb{R}^2 . Ce modèle illustre bien la situation en dimension plus grande.

6.1.1 Illustration de la déformation en dimension 3

Nous considérons la fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, t) = \frac{x^3}{3} - tx + \frac{y^2}{2}$$

Il s'agit de la forme normale d'une fonction dans le cas de \mathbb{R}^3 feuilleté par \mathbb{R}^2 au voisinage d'un point critique dégénéré. Pour les illustrations, nous choisirons la fonction θ définie à partir de la fonction

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} (\pi x - \cos(\pi x) \sin(\pi x)) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction échelon unité de classe \mathcal{C}^2 . On définit ensuite $\theta(x)$ de manière usuelle de sorte à obtenir une fonction égale à 1 sur $[-a_2; a_2]$ et nulle en dehors de $[-a_1; a_1]$. Cette fonction n'est pas de classe \mathcal{C}^∞ mais cela est suffisant pour les représentations. En coupe, le feuilletage déformé a alors l'allure suivante :

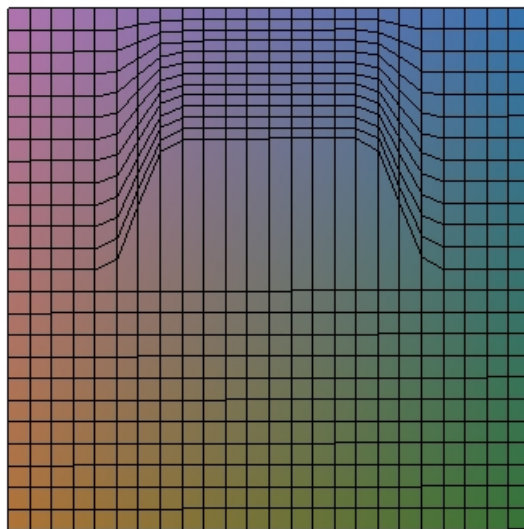


FIG. 6.4 – Vue en coupe des feuilles après déformation

On constate que cette déformation ne modifie que très peu la géométrie des trajectoires. Pour plus de précision, nous pourrions étudier la forme du champ de gradient de la fonction

avant et après déformation pour certaines valeurs du paramètre t . Sans entrer dans les détails, nous pouvons vérifier que l'allure du champ est exactement la même, il y a juste un saut lorsque l'on passe par la valeur $t = 0$ et la forme globale du champ est conservée.

6.1.2 Propriétés de la fonction déformée

L'application α est une application de M dans M qui envoie de manière bijective les plaques de $T_{a_2,b}$ avec $t_1 \in [0; 1]$ sur les plaques de $T_{a_2,b}$ avec $t_1 \in [\frac{1}{2}; 1]$. Comme nous l'avons déjà précisé, la déformation consiste à faire un trou autour du point critique dégénéré du « côté » de la variété critique. Nous allons maintenant étudier l'influence de la déformation sur la fonction f et surtout sur les ensembles critiques.

Remarquons que nous avons défini l'application α comme une déformation du feuilletage. Cela permet d'en donner une forme précise. Dorénavant, nous considérons toujours la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) munie de la mesure transverse Λ , seule la fonction considérée est modifiée.

Notons $\tilde{f} = f \circ \alpha$. Il est clair que \tilde{f} est une fonction mesurable et longitudinalement lisse. Cela découle de la définition de la fonction α . Par contre, cette nouvelle fonction n'est pas continue transversalement pour $t_1 = 0$ (la plaque critique). Elle est tout de même continue à droite mais non continue à gauche.

Intéressons nous maintenant aux points critiques longitudinaux de cette nouvelle fonction. D'après la forme de la déformation dans $T_{a_2,b}$, il est clair que \tilde{f} possède exactement deux points critiques sur chaque plaque de $T_{a_2,b}$. Nous allons maintenant vérifier que \tilde{f} n'a pas de points critiques dans $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$ à condition que b soit suffisamment petit. Le gradient feuilleté $\nabla_{\mathcal{F}} f$ s'annule exactement sur la variété critique. En particulier, si ε est suffisamment petit, l'ensemble :

$$U_\varepsilon = \{x \in M / |\nabla_{\mathcal{F}} f| < \varepsilon\}$$

est un voisinage tubulaire de la variété critique Σ qui ne coupe pas $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$. Cela implique que sur $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$ on a :

$$|\nabla_{\mathcal{F}} f| > \varepsilon$$

D'autre part, si l'on choisit le paramètre b suffisamment petit, on peut supposer que l'application α est suffisamment proche de l'identité dans $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$ de sorte que sur cet ensemble :

$$|\nabla_{\mathcal{F}} (f \circ \alpha)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, la fonction \tilde{f} n'a pas de points critiques dans $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$.

Finalement, cela signifie que pour la mesure transverse Λ les ensembles critiques associés respectivement aux fonctions f et \tilde{f} ont même mesure. En fait, nous avons aussi

une bijection naturelle entre les ensembles $\Sigma(f) \cap T_{a_1,b}$ et $\Sigma(\tilde{f}) \cap T_{a_1,b}$, et même plus exactement entre les ensembles $C^i(f) \cap T_{a_1,b}$ et $C^i(\tilde{f}) \cap T_{a_1,b}$ pour $i = q$ ou $i = q + 1$. Cette bijection est définie en associant à chaque point critique c_t^q sur la plaque P_t le point critique $c_{\alpha(t)}^q$ de la plaque $P_{\alpha(t)}$. Cette déformation peut être effectuée dans chaque carte de type naissance-mort. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels cartes, il suffit d'étendre cette application par l'identité en dehors du nombre fini de voisinage $T_{a_1,b}$ pour obtenir une bijection entre les ensembles critiques $\Sigma(f)$ et $\Sigma(\tilde{f})$. En particulier, nous pouvons remarquer que la fonction \tilde{f} n'a que des points critiques de Morse et qu'il n'y a donc aucune feuille critique.

Il faut souligner qu'il y a par contre un problème au niveau de la plaque critique. En effet, le point critique dégénéré est envoyé sur deux points critiques d'indice q et $q + 1$ respectivement. Nous n'avons donc pas tout à fait une bijection entre $\Sigma(f)$ et $\Sigma(\tilde{f})$. Cependant, nous avons une bijection entre $\overline{C}^q(f)$ et $\overline{C}^q(\tilde{f})$ qui égal à $C^q(\tilde{f})$ puisque la fonction \tilde{f} n'a plus que des points critiques de Morse. Cela revient aussi à dire que l'ensemble $\Gamma(\tilde{f})$ est vide.

Notations 6.1.1 *Pour simplifier, posons $\widetilde{C}^q := \overline{C}^q(\tilde{f}) = C^q(\tilde{f})$ et notons β^q ou simplement β s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'isomorphisme entre \widetilde{C}^q et \overline{C}^q :*

$$\beta^q : \widetilde{C}^q \rightarrow \overline{C}^q$$

La déformation nous permet finalement de définir une nouvelle fonction \tilde{f} définie sur la variété feuilletée (M, L, Λ) dont les ensembles critiques sont les mêmes à isomorphisme près et ont même mesure transverse. La fonction déformée \tilde{f} est continue Λ -presque partout. En particulier, elle dépend mesurablement du paramètre transverse. Enfin, elle est de Morse en restriction à chaque feuille. Nous connaissons même la forme locale des variétés critiques dans les cartes de naissance-mort après la déformation.

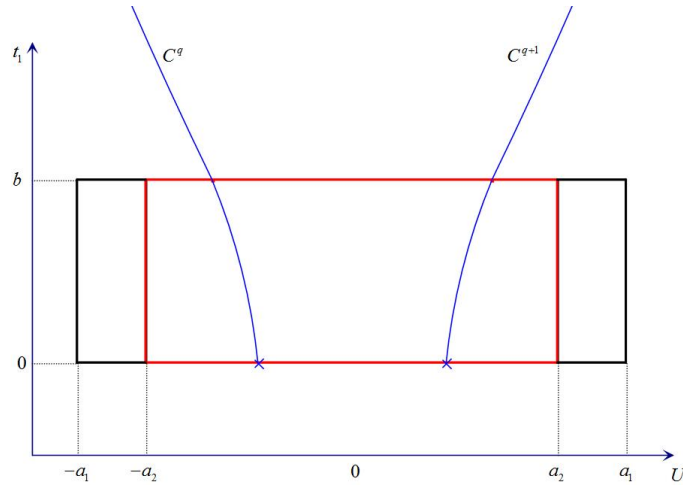


FIG. 6.5 – La variété critique $\widetilde{\Sigma}$ dans une carte de naissance-mort

Remarquons que les ensembles critiques \widetilde{C}^q sont des variétés compactes ce qui n'était pas le cas des ensembles critiques associés à la fonction f . Cela signifie que nous pouvons appliquer le lemme de Morse jusqu'au bord des variétés critiques. En appliquant la construction que nous avons effectuée pour la fonction f , nous pouvons donc construire un voisinage tubulaire feuilleté de la variété critique tel que dans ce voisinage, la fonction ait une forme normale de Morse et la métrique soit la métrique plate. En particulier, nous n'aurons pas les problèmes liés à la forme de la métrique.

Localement dans ce nouveau voisinage tubulaire, la situation est la même que pour la fonction initiale dans une carte de Morse. Tout ce qui a été fait dans les chapitres précédents pour la fonction f est en particulier valable pour la fonction \widetilde{f} . Toutes les bornes que nous avons exhibé à propos des trajectoires peuvent encore être définies. Il est donc clair que nous pouvons définir un complexe d'orientation feuilleté associé à la fonction \widetilde{f} ainsi qu'un complexe de Witten feuilleté associé à la fonction \widetilde{f} . La structure de champ mesurable étant simplement le transport par la déformation de la structure initiale.

Nous choisissons de ne pas détailler pour l'instant cette question de transport de structure. En effet, nous pouvons définir un pseudo complexe de Witten feuilleté ainsi qu'un pseudo complexe d'orientation feuilleté en le définissant simplement feuille à feuille sans s'assurer de la mesurabilité du champs obtenu. Remarquons que le caractère de carré intégrable est directement obtenu du fait de la finitude de la mesure transverse de la variété critique associée à la fonction \widetilde{f} (à condition que le champ soit mesurable).

Dans ce qui suit, nous allons démontrer précisément que les complexes de Witten feuilleté et d'orientation associés respectivement aux fonctions f et \widetilde{f} sont isomorphes en tant que champs. Cela nous permettra en particulier d'obtenir le caractère mesurable des champs pour la fonction \widetilde{f} . Dans un premier temps, nous donnerons les définitions des complexes du Witten feuilleté et du complexe d'orientation pour la fonction \widetilde{f} . Nous pourrons ensuite vérifier que ces nouveaux complexes calculent les mêmes cohomologies que les complexes associés à la fonction initiale f .

6.2 Hypothèses sur la métrique et les trajectoires

Comme nous l'avons vu dans le cas de la fonction f , nous avons dû construire une métrique adaptée pour pouvoir donner un sens au complexe d'orientation. Cela nous a permis en outre d'obtenir des informations sur les trajectoires. Etant donné que nous souhaitons reproduire la construction qui a été effectuée pour la fonction f , nous devons aussi démontrer qu'il est possible de construire une métrique adaptée.

Les variétés critiques de la fonction déformée \widetilde{f} sont des variétés compactes transverses au feuilletage. Nous pouvons alors appliquer le lemme de Morse paramétrique jusqu'au

bord des variétés critiques. Cela nous permet de définir un voisinage tubulaire adapté dans lequel la fonction a une forme normale de Morse et la métrique est la métrique plate.

La démonstration pour obtenir une métrique qui satisfait aussi la condition de transversalité entre les variétés stables et instables s'adapte sans aucune modification et nous pouvons alors démontrer sans difficultés l'existence des bornes pour la longueur des trajectoires ou pour le nombre de trajectoire reliant deux points critiques. Il suffit encore une fois d'appliquer les preuves utilisées pour la fonction f sans aucun changement.

Finalement, cela signifie que tout les résultats qui ont été démontrés jusqu'à présent à propos de la fonction f sont satisfaits pour la fonction \tilde{f} . Il est donc tout à fait cohérent de définir des complexes de Witten et d'orientation pour la nouvelle fonction \tilde{f} .

Nous allons maintenant démontrer que les complexes associés aux fonctions f et \tilde{f} respectivement sont isomorphes en tant que champ et cela nous permettra en particulier d'en déduire que les champs associés à la fonction \tilde{f} sont mesurables et donc aussi de carré intégrable.

6.3 Complexes de Witten et d'orientation pour la fonction \tilde{f}

Soit L une feuille. Sur cette feuille, nous pouvons reproduire la construction qui a été faite dans le chapitre 4. En effet, feuille à feuille, la fonction est une fonction de Morse et toute la théorie qui a été appliquée à la fonction f est encore valable pour la fonction \tilde{f} . Nous pouvons donc définir le champ de complexe défini feuille à feuille par :

$$0 \rightarrow \left(l^2(C^0(\tilde{f}) \cap L) \right) \xrightarrow{\partial^0} \left(l^2(C^1(\tilde{f}) \cap L) \right) \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^{p-1}} \left(l^2(C^p(\tilde{f}) \cap L) \right) \rightarrow 0$$

Nous obtenons ainsi un champ de Hilbert mesurable qui correspond au complexe d'orientation feuilleté pour la fonction \tilde{f} :

$$0 \rightarrow \left(l^2(C^0(\tilde{f})) \right) \xrightarrow{\partial^0} \left(l^2(C^1(\tilde{f})) \right) \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{\partial^{p-1}} \left(l^2(C^p(\tilde{f})) \right) \rightarrow 0$$

Intéressons nous maintenant au complexe de Witten. Encore une fois, nous fixons une feuille L . Feuille à feuille, nous pouvons toujours définir le complexe de De Rham. De la même manière que dans le chapitre 5, nous pouvons déformer l'opérateur de différentiation :

$$\widetilde{d_{\tau,L}^q} := e^{-\tau \tilde{f}} d_L^q \left(e^{\tau \tilde{f}} \right)$$

En restreignant les espaces sur lesquels l'opérateur agit, nous obtenons alors un complexe défini feuille à feuille par :

$$0 \rightarrow \widetilde{W_{\tau,L}^0} \xrightarrow{\widetilde{d_{\tau,L}^0}} \widetilde{W_{\tau,L}^1} \xrightarrow{\widetilde{d_{\tau,L}^1}} \dots \xrightarrow{\widetilde{d_{\tau,L}^{p-1}}} \widetilde{W_{\tau,L}^p} \xrightarrow{\widetilde{d_{\tau,L}^p}} 0$$

où les ensembles $\widetilde{W}_{\tau,L}^i$ désigne, comme pour la fonction f , la restriction des projections spectrales du Laplacien de Witten modifié, perturbé par la fonction \widetilde{f} et associé à des valeurs propres plus petite qu'une constante fixée A . Cela nous permet aussi de définir un champ (mesurable) de Hilbert.

Enfin, remarquons qu'en reprenant la construction de la base adaptée pour les espaces $W_{\tau,L}^i$ associé à la fonction f , nous pourrions construire une base de forme propre approchée pour la fonction \widetilde{f} . Nous ne détaillons pas non plus ce point car nous allons définir explicitement ces formes en les transportant grâce à la déformation.

Finalement, nous venons de construire des complexes de Witten et d'orientation associés à la nouvelle fonction considérée \widetilde{f} . Pour pouvoir continuer l'étude des complexes pour la fonction \widetilde{f} , il faut vérifier que les complexes associés aux fonctions f et \widetilde{f} respectivement sont les mêmes à isomorphismes près. Il nous suffira ainsi de démontrer que les complexes de Witten et d'orientation pour la fonction \widetilde{f} calculent bien la même cohomologie pour conclure.

6.4 Complexe de Witten avant et après déformation

Comme nous l'avons déjà vu, nous avons une bijection naturelle β entre les ensembles critiques $C^q(\widetilde{f})$ et $C^q(f)$. En particulier, cela implique que les champs $l^2(C^q(f))$ et $l^2(C^q(\widetilde{f}))$ sont mesurablement isomorphes (pour la structure naturelle sur ces espaces). Cela signifie déjà que les modules du complexe de Witten associés aux fonctions f et \widetilde{f} sont mesurablement isomorphes puisqu'ils sont chacun isomorphes aux champs $l^2(C^q(f))$ et $l^2(C^q(\widetilde{f}))$ respectivement.

Pour démontrer que les groupes de cohomologie du complexe de Witten associé à chacune des fonctions f et \widetilde{f} sont les mêmes, il suffit de démontrer que l'action de l'opérateur $d_{\tau,L}^q$ est la même que celle de l'opérateur $\widetilde{d}_{\tau,L}^q$ où :

$$\widetilde{d}_{\tau,L}^q = e^{-\tau\widetilde{f}} de^{\tau\widetilde{f}} = e^{-\tau f \circ \alpha} de^{\tau f \circ \alpha}$$

Plus exactement, nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 6.4.1 *Les complexes de Witten feuilletés modifiés associés aux fonctions f et \widetilde{f} respectivement calculent la même cohomologie.*

Nous commençons par exhiber l'analogue de la base dans laquelle on calcule l'action de l'opérateur. Nous vérifierons ensuite directement que l'action du nouvel opérateur sur ces formes coïncide exactement avec celle de l'opérateur initial ce qui nous permettra de conclure.

Pour tout point critique c de \widetilde{f} , définissons des formes $\widetilde{\omega_{c,\tau}}$ par la relation :

$$\widetilde{\omega_{c,\tau}} = \omega_{\beta(c),\tau} \circ \alpha$$

où les formes $\omega_{c,\tau}$ sont les formes qui constituent une base de $F_{\tau,L}^q$ pour la fonction f (Cf. Chapitre 5), en rappelant que :

$$F_{\tau,L}^q = \text{Im } E_{]-\infty;A]} (\Delta_{\tau,L}^q)$$

Par analogie, on définit l'espace $\widetilde{F_{\tau,L}^q}$ comme l'espace $\text{Im } E_{]-\infty;A]} (\widetilde{\Delta_{\tau,L}^q})$ avec $\widetilde{\Delta_{\tau,L}^q}$ le Laplacien de Witten modifié associé à la fonction \widetilde{f} .

Remarque 6.4.1 *Nous ne pouvons pas affirmer directement que les formes $\widetilde{\omega_{c,\tau}}$ constituent une base de $\widetilde{F_{\tau,L}^q}$. Nous pouvons par contre dire que l'espace engendré par ces formes est isomorphe à $F_{\tau,L}^q$.*

Par définition, nous avons :

$$\widetilde{d_{\tau,L}^q} \omega(u, t) = e^{-\tau f \circ \alpha} d e^{\tau f \circ \alpha} \omega(u, t) = \tau d(f \circ \alpha)(u, t) \wedge \omega(u, t) + d\omega(u, t)$$

Donc cela nous donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{d_{\tau,L}^q} \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t) &= \widetilde{d_{\tau,L}^q} (\omega_{\beta(c),\tau} \circ \alpha)(u, t) \\ &= \tau d_L(f \circ \alpha)(u, t) \wedge (\omega_{\beta(c),\tau} \circ \alpha)(u, t) + d_L(\omega_{\beta(c),\tau} \circ \alpha)(u, t) \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a :

$$d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}(u, t) = \tau df(u, t) \wedge \omega_{\beta(c),\tau}(u, t) + d\omega_{\beta(c),\tau}(u, t)$$

et que l'opérateur de différentiation feuilleté est définie localement par :

$$d_L(\omega du^I) = \sum_{j=1}^q \frac{\partial \omega}{\partial u_j} du^j \wedge du^I$$

Si le point critique considéré n'est pas dans $T_{a_2,b}$ alors il est en dehors de $T_{a_1,b}$ et dans ce cas, l'application α est l'identité, ce qui nous donne automatiquement :

$$\widetilde{d_{\tau,L}^q} \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t) = d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}(\alpha(u, t))$$

Sinon, nous pouvons supposer que les supports des formes $\omega_{c,\tau}$ pour $c \in T_{a_2,b}$ sont contenus dans N_δ et donc en particulier dans $T_{a_2,b}$. Nous pouvons donc restreindre le calcul de $\widetilde{d_{\tau,L}^q} \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t)$ à $T_{a_2,b}$, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\widetilde{d_{\tau,L}^q} \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t) = \tau df(\alpha(u, t)) \wedge (\omega_{\beta(c),\tau} \circ \alpha)(u, t) + d\omega_{\beta(c),\tau}(\alpha(u, t))$$

Nous en déduisons donc finalement que :

$$\widetilde{d_{\tau,L}^q} \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t) = d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}(\alpha(u, t))$$

Cela s'écrit aussi :

$$\widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}} = (d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}) \circ \alpha$$

Considérons maintenant une $q+1$ -forme $\widetilde{\omega}$ définie sur la feuille L . Par définition, nous avons :

$$\left\langle \widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \right\rangle = \int_L \widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}(u, t) \wedge (*\widetilde{\omega}(u, t)) du = \int_L d_{\tau,L}^q \omega_{\alpha(c),\tau}(\alpha(u, t)) \wedge (*\widetilde{\omega}(u, t)) du$$

Comme la forme $\widetilde{\omega_{c,\tau}^q}$ est à support dans une plaque de $T_{a_2,b}$, nous pouvons remplacer L par P_{t_0} avec $c = (u_0, t_0)$. Effectuons alors le changement de variable $(\widetilde{u}, \widetilde{t}) = \alpha(u, t)$, nous obtenons :

$$\left\langle \widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \right\rangle = \int_{P_{\alpha(t_0)}} d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}(\widetilde{u}, \widetilde{t}) \wedge (*(\widetilde{\omega} \circ \alpha^{-1})(\widetilde{u}, \widetilde{t})) d\widetilde{u}$$

Cela signifie exactement que :

$$\left\langle \widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \right\rangle = \left\langle d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau}; \widetilde{\omega} \circ \alpha^{-1} \right\rangle$$

Nous vérifions de la même manière que :

$$\left\langle \widetilde{d}_{\tau,L}^{q-1,*} \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \right\rangle = \left\langle d_{\tau,L}^{q-1,*} \omega_{\beta(c),\tau}; \widetilde{\omega} \circ \alpha^{-1} \right\rangle$$

Utilisons maintenant ces relations avec $\widetilde{\omega} = \widetilde{d}_{\tau,L}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}$ et respectivement $\widetilde{\omega} = \widetilde{d}_{\tau,L}^{q-1,*} \widetilde{\omega_{c,\tau}}$, nous obtenons :

$$\left\| \widetilde{d}_{\tau,L}^k \widetilde{\omega_{c,\tau}} \right\|^2 = \left\| d_{\tau,L}^k \omega_{\beta(c),\tau} \right\|^2 \text{ et } \left\| \widetilde{d}_{\tau,L}^{k-1,*} \widetilde{\omega_{c,\tau}} \right\|^2 = \left\| d_{\tau,L}^{k-1,*} \omega_{\beta(c),\tau} \right\|^2$$

Rappelons maintenant que :

$$\left\langle \Delta_{\tau}^q \omega_{c,\tau}; \omega_{c,\tau} \right\rangle = \left\| d_{\tau,L}^q \omega_{c,\tau} \right\|^2 + \left\| d_{\tau,L}^{q+1,*} \omega_{c,\tau} \right\|^2$$

Nous avons une relation analogue pour le Laplacien de Witten associé à la fonction \widetilde{f} . Nous en déduisons donc que :

$$\left\langle \widetilde{\Delta}_{\tau}^q \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega_{c,\tau}} \right\rangle = \left\langle \Delta_{\tau}^q \omega_{\beta(c),\tau}; \omega_{\beta(c),\tau} \right\rangle$$

Par définition des formes $\omega_{c,\tau}$, nous pouvons donc en conclure que $\widetilde{\omega_{c,\tau}} \in \widetilde{F_{\tau,L}^q}$.

Utilisons une nouvelle fois la définition du produit scalaire pour calculer pour toute q -forme $\widetilde{\omega}$ le produit scalaire $\langle \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \rangle$. A l'aide du changement de variables $(\widetilde{u}, \widetilde{t}) = \alpha(u, t)$, nous pouvons vérifier que :

$$\langle \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega} \rangle = \langle \omega_{\beta(c),\tau}; \widetilde{\omega} \circ \alpha^{-1} \rangle$$

Appliquons alors cette relations avec $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega_{c',\tau}}$, nous obtenons :

$$\langle \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega_{c',\tau}} \rangle = \langle \omega_{\beta(c),\tau}; \omega_{\beta(c'),\tau} \rangle$$

La famille $\omega_{c,\tau}$ étant une base, c'est en particulier une famille libre donc :

$$\langle \widetilde{\omega_{c,\tau}}; \widetilde{\omega_{c',\tau}} \rangle = \delta_{\beta(c),\beta(c')} = \delta_{c,c'}$$

Nous en déduisons que la famille $\{\widetilde{\omega_{c,\tau}}\}$ est une famille libre.

D'autre part, supposons qu'elle ne soit pas génératrice de l'espace $\widetilde{F_{\tau,L}^q}$ alors il existe une forme $\widetilde{\omega}$ orthogonale à toutes les formes $\widetilde{\omega_{c,\tau}}$ mais cela implique qu'il existe une forme $\widetilde{\omega} \circ \alpha^{-1}$ orthogonale à toutes les formes $\omega_{c,\tau}$, ce qui implique que cette forme est nulle et donc que $\widetilde{\omega}$ est nulle. Nous en concluons donc que la famille $\{\widetilde{\omega_{c,\tau}}\}$ est une base de $\widetilde{F_{\tau,L}^q}$.

Remarque 6.4.2 *En fait, nous allons voir qu'il n'était pas utile de vérifier que la famille $\{\widetilde{\omega_{c,\tau}}\}$ constitue une base de $\widetilde{F_{\tau,L}^q}$. Nous préférons le démontrer pour bien insister sur l'analogie entre les deux structures considérées.*

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour prouver le résultat de cette section.

Preuve de la proposition 6.4.1 : Soit $\widetilde{\eta}$ une q -forme définie sur la feuille L . Nous avons :

$$\langle \widetilde{\Delta_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}}; \widetilde{\omega_{c,\tau}} \rangle = \langle \widetilde{d_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}}; \widetilde{d_{\tau,L}^q \omega_{c,\tau}} \rangle + \langle \widetilde{d_{\tau,L}^{q-1,*} \widetilde{\eta}}; \widetilde{d_{\tau,L}^{q-1,*} \omega_{c,\tau}} \rangle$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, nous pouvons écrire que :

$$\langle \widetilde{\Delta_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}}; \widetilde{\omega_{c,\tau}} \rangle = \langle \left(\widetilde{d_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}} \right) \circ \alpha^{-1}; d_{\tau,L}^q \omega_{\beta(c),\tau} \rangle + \langle \left(\widetilde{d_{\tau,L}^{q-1,*} \widetilde{\eta}} \right) \circ \alpha^{-1}; d_{\tau,L}^{q-1,*} \omega_{\beta(c),\tau} \rangle$$

Les supports des formes $\omega_{\beta(c),\tau}$ étant contenus dans des ensembles sur lesquels l'application α ne dépend que du paramètre transverse, nous pouvons supposer que $\widetilde{\eta}$ est aussi à support sur ces ensembles. En particulier, nous pouvons remplacer $\left(\widetilde{d_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}} \right) \circ \alpha^{-1}$ par $d_{\tau,L}^q (\widetilde{\eta} \circ \alpha^{-1})$ dans le produit scalaire et de même $\left(\widetilde{d_{\tau,L}^{q-1,*} \widetilde{\eta}} \right) \circ \alpha^{-1}$ par $d_{\tau,L}^{q-1,*} (\widetilde{\eta} \circ \alpha^{-1})$. Nous obtenons donc :

$$\langle \widetilde{\Delta_{\tau,L}^q \widetilde{\eta}}; \widetilde{\omega_{c,\tau}} \rangle = \langle \Delta_{\tau,L}^q (\widetilde{\eta} \circ \alpha^{-1}); \omega_{\beta(c),\tau} \rangle$$

Cette relation nous permet alors d'associer à tout élément $\widetilde{\eta} \in \text{Ker} \left(\widetilde{\Delta_{\tau,L}^q} \right)$, un élément $\widetilde{\eta} \circ \alpha^{-1}$ de $\text{Ker} \left(\Delta_{\tau,L}^q \right)$ et inversement si $\eta \in \text{Ker} \left(\Delta_{\tau,L}^q \right)$, on lui associe $\eta \circ \alpha \in \text{Ker} \left(\widetilde{\Delta_{\tau,L}^q} \right)$. Cela nous donne donc un isomorphisme entre les noyaux des Laplaciens de Witten associés aux fonctions f et \widetilde{f} respectivement.

Par construction, cet isomorphisme feuille à feuille ne dépend que de l'application α qui dépend mesurablement du paramètre transverse. Cela induit donc un isomorphisme mesurable de champs.

Sachant que les groupes de cohomologies sont entièrement déterminés par les noyaux des Laplaciens, nous pouvons en conclure que les groupes de cohomologies associés à chacun des complexes sont isomorphes. Comme nous l'avons déjà précisé, nous pouvons aussi en déduire que les modules associés au complexe de Witten modifié définissent un champ de Hilbert mesurable de carré intégrable. ■

6.5 Complexe d'orientation avant et après déformation

Encore une fois, nous avons déjà vu que les variétés critiques pour les fonctions \tilde{f} et f respectivement sont en bijection via l'application β . Cela nous permet d'affirmer que les modules associés aux deux complexes d'orientation sont mesurablement isomorphes (pour la structure naturelle). Comme pour les complexes de Witten feuilletés, nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 6.5.1 *Les complexes d'orientation feuilletés associés aux fonctions f et \tilde{f} respectivement calculent la même cohomologie.*

Pour démontrer ce résultat, nous allons procéder de la même manière que dans la section précédente, c'est-à-dire prouver que les opérateurs d'orientation associés à chacune des deux fonctions ont la même action. Pour cela, rappelons l'idée de la construction de l'opérateur d'orientation. On définit cet opérateur feuille à feuille de la façon suivante. On commence par définir un nombre d'intersection $n_\gamma(x, y)$ associé à tous couples de points critiques (x, y) d'indice q et $q + 1$ reliés par une trajectoire γ . Ensuite, on définit $\#(x, y)$ comme la somme des $n_\gamma(x, y)$ pour toutes les trajectoires γ reliant ces deux points. Si les points ne sont pas reliés, on pose par convention $\#(x, y) = 0$.

La première étape consiste à démontrer que les ensembles des trajectoires reliant deux points critiques associés à chacune des fonction f et \tilde{f} sont isomorphes. Ensuite, nous vérifierons que pour chaque trajectoire, le nombre d'intersection $n_\gamma(x, y)$ associé à la fonction \tilde{f} coïncide avec celui associé à la fonction f . Rappelons les définitions des trajectoires :

- γ trajectoire feuilletée de f sur $L \Leftrightarrow \nabla_L f(\gamma(s)) = \dot{\gamma}(s)$
- γ trajectoire feuilletée de \tilde{f} sur $L \Leftrightarrow \nabla_L \left(\tilde{f} \right) (\gamma(s)) = \dot{\gamma}(s)$

Commençons par remarquer que nous avons la relation suivante valable pour tout point (u, t) n'appartenant pas à $T_{a_1, b} \setminus T_{a_2, b}$:

$$\nabla_L \left(\tilde{f} \right) (u, t) = \nabla_L f(\alpha(u, t))$$

En effet, nous avons par définition :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{F}}(\tilde{f})(u, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial u^i} (f \circ \alpha)(u, t) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial u^i} (f(u, \tilde{\alpha}(u, t))) \right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial u^i}(u, \tilde{\alpha}(u, t)) + \sum_{j=1}^{n-p} \frac{\partial \tilde{\alpha}^j}{\partial u^i}(u, t) \frac{\partial f}{\partial t^j}(u, \tilde{\alpha}(u, t)) \right]\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $(u, t) \in T_{a_2, b}$ alors nous savons que $\frac{\partial \tilde{\alpha}^j}{\partial u^i}(u, t) = 0$ donc nous obtenons :

$$\nabla_{\mathcal{F}}(\tilde{f})(u, t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u^i}(u, \tilde{\alpha}(u, t)) \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial u^i}(\alpha(u, t)) \right] = \nabla_{\mathcal{F}}(f)(\alpha(u, t))$$

D'autre part, si $(u, t) \in T_{a_1, b}$ alors α est l'identité et cette relation est encore vérifiée.

La variété M étant compacte, nous savons que les trajectoires sont complètes, c'est-à-dire définies sur \mathbb{R} tout entier. Cela est valable aussi bien pour la fonction f que pour la fonction \tilde{f} . De plus, nous savons que les trajectoires relient deux points critiques et qu'elles ne passent par aucun autre point critique. Cela signifie donc que pour s suffisamment grand et s suffisamment petit, les trajectoires appartiennent à un voisinage des points critiques, et en particulier sont contenues dans N_δ . Nous avons d'ailleurs démontré que le temps passé en dehors de N_δ est fini.

Considérons deux points critiques x, y pour la fonction \tilde{f} appartenant à une même feuille L et une trajectoire γ reliant ces deux points. D'après ce qui précède, nous avons :

$$\nabla_L(\tilde{f})(\gamma) = \nabla_L f(\alpha \circ \gamma) = \dot{\gamma}$$

pour tout s tel que $\gamma(s)$ est en dehors de $T_{a_1, b}$ ou appartient à $T_{a_2, b}$. De plus, si nous notons I le sous ensemble de \mathbb{R} contenant ces éléments s , nous savons que $I \neq \emptyset$ car il contient au moins un voisinage de $+\infty$ (et même de $-\infty$).

Intéressons nous alors à la dérivée de $(\alpha \circ \gamma)(s)$. On se place sur une carte $U \times T$ contenant l'un des points critiques x, y , disons x pour simplifier. La trajectoire appartient à la feuille passant par $x = (u, t)$, ce qui implique qu'elle est du type $\gamma(s) = (\gamma_U(s), t)$, et sa dérivée vérifie $\dot{\gamma}(s) = (\dot{\gamma}_U(s), 0)$. Ces relations étant valables pour tout s tel que $\gamma(s) \in U \times T$. D'autre part, par définition nous avons :

$$(\alpha \circ \gamma)(s) = (\gamma_U(s), \tilde{\alpha}(\gamma_U(s), t))$$

Donc nous obtenons :

$$\frac{d}{ds}(\alpha \circ \gamma)(s) = \left(\dot{\gamma}_U(s), \frac{d(\gamma_U)_j}{ds}(s) \times \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial u^j}(\gamma_U(s), t) \right)$$

avec $\gamma_U = \left((\gamma_U)_j \right)_{j=1..p}$.

Or nous savons qu'en dehors de $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$, la fonction $\tilde{\alpha}$ est constante par rapport aux premières variables, c'est-à-dire que pour tout point (u, t) en dehors de $T_{a_1,b} \setminus T_{a_2,b}$, nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial u^j}(u, t) = 0$$

Cela est en particulier le cas au voisinage des points critiques, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\frac{d}{ds}(\alpha \circ \gamma)(s) = \dot{\gamma}(s)$$

dans un voisinage des points critiques (au moins ; cela est même valable pour tout $s \in I$).

Nous en déduisons que la courbe $\alpha \circ \gamma$ est une trajectoire de f sur l'ensemble I (et au moins dans un voisinage des points critiques) puisque pour tout $s \in I$, nous avons :

$$\nabla_L f(\alpha \circ \gamma) = \frac{d}{ds}(\alpha \circ \gamma)(s)$$

Rappelons maintenant le résultat suivant sur les trajectoires :

Théorème 6.5.1 (*Unicité des trajectoires*) Soit V une sous variété de E de dimension finie, X un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur V , et $\gamma : I \rightarrow V, \gamma' : I' \rightarrow V$ deux courbes intégrales de X (deux trajectoires du champ X). S'il existe $t_0 \in I \cap I'$ tel que $\gamma(t_0) = \gamma'(t_0)$ alors :

$$\forall t \in I \cap I', \gamma(t) = \gamma'(t)$$

La courbe $\alpha \circ \gamma$ coïncide avec une portion d'une trajectoire de f en tout point d'un intervalle non vide, donc d'après le résultat d'unicité, on peut associer à toute trajectoire γ une unique trajectoire $\tilde{\gamma}$ définie sur \mathbb{R} tout entier. Cette trajectoire relie les points $\beta(x), \beta(y)$. De la même manière, nous pouvons associer à chaque trajectoire γ de f , une trajectoire $\tilde{\gamma}$ de \tilde{f} .

Nous obtenons ainsi une application :

$$\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$$

qui est une bijection entre l'ensemble des trajectoires reliant deux points critiques fixés x et y associés aux fonctions \tilde{f} et f respectivement. Cela nous permet aussi d'affirmer que les trajectoires pour la nouvelle fonction ont les mêmes propriétés que pour la fonction initiale. En particulier, les constantes qui majorent le nombre de points reliés à un autre point ainsi que la borne pour le nombre de trajectoire entre deux points fixés sont les mêmes.

Nous pouvons maintenant étudier l'action de l'opérateur d'orientation associé à la fonction f . L'application α laisse invariante les premières coordonnées. De plus, dans un voisinage des points critiques, la fonction $\tilde{\alpha}$ ne dépend pas des premières coordonnées. Cela implique que si l'on fixe une orientation en un point critique x du plan tangent à la feuille en ce point, cette orientation n'est pas modifiée par l'application α . De même, les orientations choisies pour $T_x W^u(x)$ ainsi que pour $T_x W^s(x)$ vont être conservées.

Remarque 6.5.1 *Cette observation sur la conservation des orientations n'est pas indispensable. Nous avons en effet vu que l'action de l'opérateur d'orientation, en particulier les groupes de cohomologies qui vont être obtenus à partir de cet opérateur, ne dépendent pas du choix des orientations.*

Nous pouvons donc répéter le procédé de construction de l'opérateur d'orientation pour obtenir un opérateur similaire à l'opérateur d'orientation pour la fonction f . Le fait que les orientations soient conservées nous permet de savoir en plus que les nombres d'orientations sont exactement les mêmes dans le sens où nous avons :

$$n_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = n_{\gamma}(\beta(\tilde{x}), \beta(\tilde{y}))$$

donc en particulier :

$$\tilde{\#}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \#(\beta(\tilde{x}), \beta(\tilde{y}))$$

L'opérateur d'orientation est ensuite défini sur les générateurs (\tilde{C}^q les points critiques de \tilde{f}) en posant :

$$\tilde{\delta}\tilde{x} = \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x}} \tilde{\#}(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{y}$$

Nous étendons ensuite cet opérateur aux sommes formelles l^2 par linéarité.

A l'isomorphisme β près, l'action de l'opérateur d'orientation est la même pour les deux fonctions f et \tilde{f} . Cela nous permet de démontrer le résultat principal de cette section.

Preuve de la proposition 6.5.1 : Rappelons que sur $l^2(C^q \cap L)$, nous avons une structure hilbertienne naturelle avec le produit scalaire défini par :

$$\langle \omega; \eta \rangle = \left\langle \sum_{x \in C^q \cap L} a_x x, \sum_{y \in C^q \cap L} b_y y \right\rangle = \sum_{x \in C^q \cap L} a_x b_x$$

Considérons alors $\tilde{\eta}$ une q -forme et notons δ_L^q respectivement $\tilde{\delta}_L^q$ les opérateurs d'orientations sur la feuille L associé aux fonctions f et \tilde{f} respectivement. Par définition, nous avons :

$$\langle \tilde{\delta}_L^q \tilde{\eta}; \tilde{\delta}_L^q \tilde{x} \rangle = \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x}} \tilde{\#}(\tilde{x}, \tilde{y}) \langle \tilde{\delta}_L^q \tilde{\eta}; \tilde{y} \rangle$$

où la somme est finie. Décomposons alors $\tilde{\eta}$ dans la base des points critiques :

$$\tilde{\eta} = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} b_{\tilde{z}} \tilde{z}$$

Cela nous donne donc :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}_L^q \tilde{\eta}; \tilde{\delta}_L^q \tilde{x} \rangle &= \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x}} \tilde{\#}(\tilde{x}, \tilde{y}) b_{\tilde{z}} \langle \tilde{\delta}_L^q \tilde{z}; \tilde{y} \rangle \\ &= \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x}} \left(\sum_{\tilde{w} \text{ relié à } \tilde{z}} \tilde{\#}(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{\#}(\tilde{z}, \tilde{w}) b_{\tilde{z}} \langle \tilde{w}, \tilde{y} \rangle \right) \end{aligned}$$

Or $\langle \tilde{w}; \tilde{y} \rangle = \delta_{\tilde{w}, \tilde{y}}$ donc :

$$\langle \delta_L^q \tilde{\eta}; \delta_L^q \tilde{x} \rangle = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x} \text{ et à } \tilde{z}} \#(\tilde{x}, \tilde{y}) \#(\tilde{z}, \tilde{y}) b_{\tilde{z}}$$

Associons maintenant à $\tilde{\eta}$ l'élément η défini par :

$$\eta = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} b_{\tilde{z}} \beta(\tilde{z})$$

Cet élément définit bien un terme de $l^2(C^q \cap \alpha^{-1}(L))$. Nous pouvons vérifier sans difficultés que nous avons pour tout point critique $\tilde{x} \in \tilde{C}^q \cap L$, la relation :

$$\begin{aligned} \langle \delta_L^q \eta; \delta_L^q \beta(\tilde{x}) \rangle &= \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{y \text{ relié à } \beta(\tilde{x})} \#(\beta(\tilde{x}), y) b_{\tilde{z}} \langle \delta_L^q \beta(\tilde{z}); y \rangle \\ &= \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{y \text{ relié à } \beta(\tilde{x})} \left(\sum_{w \text{ relié à } \beta(\tilde{z})} \#(\beta(\tilde{x}), y) \#(\beta(\tilde{z}), w) b_{\tilde{z}} \langle w, y \rangle \right) \\ &= \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{y \text{ relié à } \beta(\tilde{x}) \text{ et à } \beta(\tilde{z})} \#(\beta(\tilde{x}), y) \#(\beta(\tilde{z}), y) b_{\tilde{z}} \end{aligned}$$

L'isomorphisme entre les ensembles critiques de f et de \tilde{f} nous permet de remplacer y par un certain $\beta(\tilde{y})$. La relation précédente s'écrit alors :

$$\langle \delta_L^q \eta; \delta_L^q \beta(\tilde{x}) \rangle = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{\beta(\tilde{y}) \text{ relié à } \beta(\tilde{x}) \text{ et à } \beta(\tilde{z})} \#(\beta(\tilde{x}), \beta(\tilde{y})) \#(\beta(\tilde{z}), \beta(\tilde{y})) b_{\tilde{z}}$$

Encore une fois, l'isomorphisme entre les points critiques ainsi que les trajectoires nous permet d'écrire cette relation sous la forme :

$$\langle \delta_L^q \eta; \delta_L^q \beta(\tilde{x}) \rangle = \sum_{\tilde{z} \in \tilde{C}^q \cap L} \sum_{\tilde{y} \text{ relié à } \tilde{x} \text{ et à } \tilde{z}} \#(\beta(\tilde{x}), \beta(\tilde{y})) \#(\beta(\tilde{z}), \beta(\tilde{y})) b_{\tilde{z}}$$

Nous en déduisons donc que pour tout point critique $x \in \tilde{C}^q$:

$$\langle \delta_L^q \tilde{\eta}; \delta_L^q \tilde{x} \rangle = \langle \delta_L^q \eta; \delta_L^q \beta(\tilde{x}) \rangle$$

De la même manière, nous pouvons vérifier que cette relation est encore vérifiée pour l'opérateur adjoint :

$$\langle \widetilde{\delta_L^{q-1,*} \eta}; \widetilde{\delta_L^{q-1,*} \tilde{x}} \rangle = \langle \delta_L^{q-1,*} \eta; \delta_L^{q-1,*} \beta(\tilde{x}) \rangle$$

Si nous notons $\Delta_L^{Or,q}$ et $\widetilde{\Delta_L^{Or,q}}$ les laplaciens associés aux opérateurs d'orientation pour les fonctions f et \tilde{f} respectivement, nous obtenons :

$$\langle \widetilde{\Delta_L^{Or,q} \eta}; \widetilde{\tilde{x}} \rangle = \langle \Delta_L^{Or,q} \eta; \beta(\tilde{x}) \rangle$$

Considérons alors $\tilde{\eta} \in \text{Ker} \left(\widetilde{\Delta_L^{Or,q}} \right)$. Par définition, pour tout point critique $\tilde{x} \in \widetilde{C^q}$, nous avons :

$$\left\langle \Delta_L^{Or,q} \tilde{\eta}; \tilde{x} \right\rangle = 0$$

Mais la relation précédente implique, pour tout point critique $x \in C^q(f)$, que :

$$\left\langle \Delta_L^{Or,q} \eta; x \right\rangle = 0$$

Donc en particulier $\eta \in \text{Ker} \left(\Delta_L^{Or,q} \right)$.

Réciproquement, nous pouvons associer à tout élément de $\text{Ker} \left(\Delta_L^{Or,q} \right)$ un élément de $\text{Ker} \left(\widetilde{\Delta_L^{Or,q}} \right)$.

Nous en concluons que ces ensembles sont isomorphes, ce qui implique que les groupes de cohomologie sont isomorphes, ce que l'on cherchait à démontrer. De plus, nous pouvons aussi en déduire que les modules associés au complexe d'orientation modifié définissent un champ de Hilbert mesurable de carré intégrable. ■

Chapitre 7

Démonstration du résultat principal

Le travail principal de cette thèse est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 0.1 *Le complexe d'orientation feuilleté calcule la même cohomologie que le complexe de De Rham feuilleté.*

D'après le chapitre 6, il nous suffit de démontrer ce résultat dans le cas de la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) pour la fonction \tilde{f} obtenue par la déformation α . L'intérêt de cette fonction est d'être de Morse en restriction à chaque feuille. Pour simplifier, nous noterons cette fonction simplement f dans toute la suite.

Pour démontrer ce théorème, nous allons adapter la méthode de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* utilisée pour démontrer que les nombres de Betti de ces deux complexes sont identiques dans le cas classique [46].

Castelvecchi propose une démonstration de ce résultat dans sa thèse en passant par un complexe simplicial [9]. Notre point de vue est différent. En effet, nous montrons directement que les différentielles d_τ du complexe de Witten convergent (faiblement) quand τ tend vers $+\infty$ vers les différentielles correspondantes du complexe d'orientation. Cela nous permet d'en déduire le théorème 0.1 et donne une autre démonstration des inégalités de Morse pour un feuilletage.

7.1 Les hypothèses (H_1) et (H_2)

Comme dans le travail de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*, nous commençons par démontrer deux hypothèses principales notées (H_1) et (H_2) . Rappelons ces hypothèses dans le cas classique avant de les vérifier feuille à feuille dans notre cas.

7.1.1 Les hypothèses dans le cas classique

Nous conservons les notations de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* pour désigner les points critiques afin de bien faire la différence entre le cas classique et le cas feuilleté.

Hypothèse (H_1) :

Si U_k et U_j sont deux points critiques de f et $d_{Agmon}(U_k, U_j) = f(U_j) - f(U_k)$ alors :

$$\text{ind}(U_j) \geq \text{ind}(U_k) + 1$$

Hypothèse (H_2) :

Si $U_k^{(q)}$ (resp. $U_j^{(q+1)}$) est un puits d'indice q (resp. $q+1$) et si nous avons :

$$d_{Agmon}(U_k^{(q)}, U_j^{(q+1)}) = f(U_j^{(q+1)}) - f(U_k^{(q)})$$

alors il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques minimales de $U_k^{(q)}$ à $U_j^{(q+1)}$. De plus, $W^u(U_k)$ et $W^s(U_j)$ se coupent transversalement le long de chacune de ces géodésiques.

Nous pouvons préciser que l'hypothèse (H_1) peut aussi être exprimée sous les formes suivantes :

- Si $U_k^{(q)}$ est un point critique d'indice q alors $\overline{W^u(U_k)}$ (la variété instable) ne rencontre que des points d'indice strictement plus grand que q ;
- Si $U_j^{(q+1)}$ est un point critique d'indice $q+1$ alors $\overline{W^s(U_j)}$ (la variété stable) ne rencontre que des points d'indice strictement plus petit que $q+1$.

Dans le cas feuilleté, les énoncés des hypothèses restent les mêmes à la différence près que la distance d'Agmon est la distance d'Agmon feuilletée. Cela revient simplement à dire que les hypothèses sont satisfaites feuille à feuille.

7.1.2 Validité des hypothèses dans le cas feuilleté

Nous avons vu dans les chapitres précédents plusieurs résultats concernant les trajectoires et les variétés stables et instables pour la fonction initiale. Comme nous l'avons déjà

précisé, ces résultats sont encore valables pour la fonction déformée que nous considérons dans ce chapitre. Fixons pour la suite une feuille L et remarquons que tous les points critiques de la feuille sont des points de Morse. Nous avons la propriété suivante :

Propriété 7.1.1 *Soit x et y deux points critiques. Il existe une trajectoire du champ reliant x à y si et seulement si $d_{Agmon}(x, y) = f(y) - f(x)$.*

Preuve : Considérons une trajectoire du champ de gradient feuilleté reliant le point critique x au point critique y alors, par définition, nous avons :

$$d_{Agmon}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} |\nabla_{\mathcal{F}}(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt = f(\gamma(+\infty)) - f(\gamma(-\infty)) = f(y) - f(x)$$

Cela signifie que tous les points critiques qui sont reliés par une trajectoire vérifient $d_{Agmon}(x, y) = f(y) - f(x)$.

Réciproquement, soit x, y deux points critiques vérifiant $d_{Agmon}(x, y) = f(y) - f(x)$. Nous savons qu'il existe une géodésique minimale γ (pour la distance d'Agmon) reliant x à y . En particulier, nous avons :

$$d_{Agmon}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \dot{\gamma}^2$$

Mais si $d_{Agmon}(x, y) = f(y) - f(x)$, cela implique que :

$$\dot{\gamma} = \nabla_{\mathcal{F}}(\gamma)$$

Cela signifie exactement que γ est une trajectoire et achève la démonstration de la propriété. ■

Pour obtenir l'hypothèse (H_1) , il suffit donc de démontrer que pour tout couple (x, y) de points critiques reliés par une trajectoire allant de x à y , nous avons :

$$\text{ind}(y) \geq \text{ind}(x) + 1$$

Considérons alors deux points critiques x et y reliés par une trajectoire γ . Nous avons vu que nous pouvons supposer que la métrique est telle que la condition de transversalité du champ soit satisfaite en tout point de $\mathcal{M}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$. En particulier, cela nous permet d'obtenir :

$$\dim \mathcal{M}(x, y) = \text{ind}(y) - \text{ind}(x)$$

Or dès que $x \neq y$, on a :

$$\dim \mathcal{M}(x, y) > 0$$

Cela nous donne précisément :

$$\text{ind}(y) \geq \text{ind}(x) + 1$$

Nous venons donc de vérifier que l'hypothèse (H_1) est satisfaite dans le cas feuilleté. Cette hypothèse signifie plus simplement que l'indice est strictement croissant le long des lignes du flot.

Considérons maintenant deux points critiques d'indices voisins ($\text{ind}(y) = \text{ind}(x) + 1$) toujours reliés par une trajectoire γ du champ (*i.e.* : $d(x, y) = f(y) - f(x)$). Pour vérifier l'hypothèse (H_2) , il faut vérifier qu'il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires reliant ces deux points, et de plus que le long de chacune de ces trajectoires les variétés stables et instables se coupent transversalement. Nous pouvons reformuler cela en disant que l'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ est fini et que le champ de gradient est transverse.

Comme nous l'avons déjà rappelé, nous avons perturbé la métrique de sorte à ce que le champ soit transverse en tout point de $\mathcal{M}(x, y)$. D'autre part, nous avons aussi démontré que l'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ est fini. Nous avons même d'ailleurs obtenu beaucoup plus, puisque nous avons démontré que pour tout couple de points critiques d'indices voisins, le cardinal de cet ensemble est borné par une constante N_1 indépendante des feuilles. Nous venons donc de vérifier que l'hypothèse (H_2) est satisfaite.

Les deux hypothèses principales étant satisfaites, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'approximation de l'opérateur de Witten.

7.2 Approximation de l'opérateur de Witten

Dans le chapitre 5, nous avons démontré que la cohomologie de De Rham feuilleté coïncide avec la cohomologie donnée par le complexe de Witten feuilleté suivant :

$$0 \rightarrow W_{\tau,L}^0 \xrightarrow{d_{\tau,L}^0} W_{\tau,L}^1 \xrightarrow{d_{\tau,L}^1} \dots \xrightarrow{d_{\tau,L}^{p-1}} W_{\tau,L}^p \xrightarrow{d_{\tau,L}^p} 0$$

Comme dans le cas classique, nous avons défini un complexe d'orientation feuilleté :

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} l^2(C^0 \cap L) \xrightarrow{\delta^0} l^2(C^1 \cap L) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} l^2(C^p \cap L) \xrightarrow{\delta^p} 0$$

Nous pouvons penser, par analogie avec le cas classique, que ce complexe est la limite du complexe de Witten feuilleté lorsque le paramètre τ tend vers ∞ .

Nous avons déjà vu en exhibant une base des espaces $W_{\tau,L}^q$ indexée par C^q que les modules $W_{\tau,L}^q$ et $l^2(C^q \cap L)$ sont mesurablement isomorphes dès que τ est suffisamment grand (Cf. section 5.8). Pour démontrer que la limite du complexe est le complexe d'orientation, nous devons étudier la limite de l'opérateur $d_{\tau,L}$ lorsque $\tau \rightarrow \infty$. Pour cela, nous allons étudier la forme de cet opérateur dans la base adaptée que nous avons construite.

7.2.1 Principe de l'approximation dans le cas classique

Pour simplifier, nous introduisons la notation suivante.

Notations 7.2.1 *Pour tout point critique c^q d'indice q , on note :*

$$\alpha(c^q) = \left(\frac{|\lambda_{q+1}(c^q)| \dots |\lambda_p(c^q)|}{|\lambda_1(c^q)| \dots |\lambda_q(c^q)|} \right)^{1/4}$$

où les $\lambda_i(c^q)$ sont les valeurs propres du Hessien de la fonction au point c^q rangées par ordre croissant.

Remarquons que ce coefficient dépend continument du point critique c^q le long de la variété critique C^q . En particulier, pour tout point critique c^q , $\alpha(c^q)$ est encadré entre deux constantes strictement positives indépendantes du point considéré et de la feuille.

Dans le cas classique, *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* ont démontré l'approximation suivante entre l'opérateur de Witten et celui d'orientation.

Théorème 7.2.1 (Cf. [46]) *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , si l'on note $n_{j,k}^{(l)}$ les coefficients de la matrice hd_τ dans des bases $(e_{U_k^{(l)}}^{(l)})_k$ et $(e_{U_j^{(l+1)}}^{(l+1)})_j$ adaptées et $\beta_{j,k}^{(l)}$ les coefficients de la matrice associées à l'opérateur d'orientation dans les bases correspondantes, on a :*

$$\frac{\alpha(U_j^{(l+1)})e^{-\tau f(U_j^{(l+1)})}}{\alpha(U_k^{(l)})e^{-\tau f(U_k^{(l)})}} n_{j,k}^{(l)} = \left(\sqrt{\frac{h}{\pi}} \right) \beta_{j,k}^{(l)} + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (7.1)$$

Dans le théorème précédent, le paramètre h est un paramètre qui tend vers 0 et qui correspond avec nos notations au paramètre $\frac{1}{\tau}$.

Dans le cas feuilleté, le nombre de points critiques étant infini, il n'est plus possible de décrire l'opérateur sous forme matricielle. En suivant la démonstration proposée par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*, nous allons tout de même démontrer un résultat équivalent. Après avoir défini clairement les objets analogues à ceux utilisés par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*, nous reprendrons la preuve en ne détaillant que les points qui méritent d'être précisés.

Remarque 7.2.1 *Il est possible d'améliorer l'estimation dans la relation 7.1 avec une approximation de l'ordre de $e^{-\tau\beta_0}$ avec $\beta_0 > 0$ mais cela ne nous est pas utile dans la suite.*

7.2.2 Principe de l'approximation dans le cas feuilleté

Avant de commencer la description de l'action de l'opérateur de Witten, rappelons que ce complexe est défini par restriction de l'action de l'opérateur de Witten d_τ^q à l'espace W_τ^q

dont nous avons exhibé une base : la famille $(\omega_{c,\tau})_{c \in C^q}$ (Cf. chapitre 5). Cela nous a permis, en outre, de démontrer que les champs W_τ^q et $l^2(C^q)$ sont mesurablement isomorphes. Cette base est l'analogie de la base adaptée du cas classique.

Rappelons aussi que le complexe d'orientation feuilleté est défini par la suite de flèches suivante :

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} l^2(C^0 \cap L) \xrightarrow{\delta^0} l^2(C^1 \cap L) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} l^2(C^p \cap L) \xrightarrow{\delta^p} 0$$

Pour démontrer que le complexe de Witten feuilleté calcule la même cohomologie que le complexe d'orientation feuilleté, nous allons démontrer que l'opérateur de Witten tend (faiblement) vers l'opérateur d'orientation lorsque τ tend vers $+\infty$ modulo l'identification de W_τ^q et de $l^2(C^q)$. En fait, nous allons même démontrer une relation plus précise.

Nous savons que l'opérateur est entièrement déterminée par les produits scalaires dans une base donnée et nous choisissons comme base, celle donnée par les formes $\omega_{c,\tau}$. Cela signifie que l'action de l'opérateur $d_{\tau,L}^q$ sur une feuille L est entièrement déterminée par les produits scalaires suivants associés à tout point critique x d'indice q et tout point critique y d'indice $q+1$:

$$N_{x,y,\tau,L} := \langle d_{\tau,L}^q \omega_{x,\tau,L}; \omega_{y,\tau,L} \rangle$$

De plus, pour chaque point critique fixé et donc chaque forme $\omega_{x,\tau,L}$ fixée, il n'y a qu'un nombre fini (majoré par N_2) de termes $N_{x,y,\tau,L}$ non nuls. Il suffit donc de déterminer une approximation de chacun de ces produits scalaires non nuls pour récupérer toutes les informations cherchées sur l'opérateur $d_{\tau,L}^q$. Plus exactement, nous allons démontrer que la valeur de chacun de ces produits scalaires est à l'ordre près et modulo un coefficient multiplicatif égale à $\#(x;y)$ correspondant simplement à l'action de l'opérateur d'orientation dans la base des points critiques :

$$\#(x;y) = \langle \delta x; y \rangle$$

Nous noterons $\beta_{x,y,L}$ ce deuxième coefficient par analogie avec les notations de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand*.

Remarque 7.2.2 *Il est suffisant d'étudier le comportement de chacun des termes non nuls pour obtenir un lien entre l'opérateur d'orientation et l'opérateur de Witten modifié car dans le cas où les points ne sont pas reliés, l'action de l'opérateur d'orientation sur ces deux points est nulle donc l'égalité des produits scalaires est trivialement vérifiée.*

7.2.3 Calcul BKW pour le Laplacien de Witten feuilleté

La variété étant compacte et la fonction f considérée de Morse, nous pouvons recouvrir la variété M par un nombre fini de cartes de type Morse et définir la partition de l'unité

associée à ce recouvrement. Cela nous permet de réduire le problème à un calcul dans une seule carte.

Soit alors $\Omega = U \times T$ une carte de Morse donnée par le recouvrement précédent. Les formes propres approchées sont localisées au voisinage des points critiques et quitte à affiner le recouvrement, nous pouvons supposer que chaque carte contient le voisinage tubulaire N_δ de sorte à ce que les formes $\omega_{c,\tau}$ soient à support dans les cartes associées au recouvrement considéré.

Le problème que nous nous posons maintenant est de déterminer le noyau approché du Laplacien. Pour cela, nous allons utiliser le principe BKW. Nous reprenons les grandes étapes du travail de *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* (Cf. [46]). On ramène le problème à construire des q -formes du type $e^{-\tau\phi}\omega_L$ où ω_L est une q -forme et ϕ est une fonction sur L définie localement telle que $|\nabla\phi|^2 = |\nabla f|^2$ dans une carte locale, solution de :

$$e^{\tau\phi}\Delta_{\tau,L}^q e^{-\tau\phi}\omega_L = O_{\mathcal{F}}(h^2) \quad (7.2)$$

La notation $O_{\mathcal{F}}$ qui apparaît signifie que l'estimation est valable avec une constante indépendante de la feuille L considérée. A l'aide des définitions précédentes, on démontre immédiatement le lemme suivant :

Lemme 7.2.1 *Si $|\nabla\phi|^2 = |\nabla f|^2$ alors*

$$e^{\tau\phi}\Delta_{\tau,L}^q e^{-\tau\phi} = \Delta_L^q + \tau T_L^q$$

où Δ_L^q est le Laplacien usuel feuille à feuille et l'opérateur T_L^q est défini par :

$$T_L^q = \mathcal{L}_{\nabla_{\mathcal{F}}\phi} - \mathcal{L}_{\nabla_{\mathcal{F}}\phi}^* + \mathcal{L}_{\nabla_{\mathcal{F}}f} + \mathcal{L}_{\nabla_{\mathcal{F}}f}^*$$

où $\nabla_{\mathcal{F}}$ désigne le gradient feuilletée longitudinal.

L'opérateur T_L^q est appelé opérateur de transport et $T_L^q\omega_{0,L} = 0$ sera la première équation à résoudre qui déterminera le terme principal de ω_L . Pour simplifier, nous omettons la référence à la feuille L .

Soit x un point critique de Morse d'indice q . L'existence d'une unique fonction propre de basse énergie pour le Laplacien montre que l'équation $T^q\omega = 0$ admet une solution q -forme $\omega_{0,x}$ unique à normalisation près. On peut alors arranger ce champ de forme en un champ borélien. Pour poursuivre la démonstration, il faut faire une étude plus fine de $\omega_{0,x}$ le long des variétés stables $W^+(x)$ et instables $W^-(x)$.

Pour obtenir l'expression précise de chaque forme $\omega_{0,x}$, il faut utiliser le théorème de la phase stationnaire. Les fonctions étant définies de manière analogue au cas classique, nous obtenons le résultat suivant :

$$\int e^{-2\tau\phi_x(u)} du = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} (\det \text{Hessien}(2\phi_x)(x))^{-\frac{1}{2}} + O\left(\tau^{-\frac{1}{2}}\right)$$

La fonction ϕ est notée ϕ_x car on choisit $\phi_x(u) = d_{Agmon}(x, u)$. Le grand O qui apparaît dans cette approximation dépend du point x considéré. Cette relation signifie que pour tout point critique x , il existe τ_x tel que pour tout $\tau \geq \tau_x$ il existe K_x tel que :

$$\left| \frac{\int e^{-2\tau\phi_x(u)} du}{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} (\det \text{Hessien}(2\phi_x)(x))^{-\frac{1}{2}}} \right| \leq K_x \tau^{-\frac{1}{2}}$$

Cependant, il est clair que toutes les fonctions du membre de droite dépendent continûment du point critique x ainsi que du paramètre τ . Nous pouvons donc affirmer qu'il existe un voisinage V_x de x dans C^q tel que l'inégalité suivante soit valable pour tout point y dans V_x dès que $\tau \geq \widetilde{\tau}_x$:

$$\left| \frac{\int e^{-2\tau\phi_y(u)} du}{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} (\det \text{Hessien}(2\phi_y)(y))^{-\frac{1}{2}}} \right| \leq \widetilde{K}_x \tau^{-\frac{1}{2}}$$

La compacité de la variété critique C^q nous permet alors d'en conclure quant à l'existence d'un τ_0 et d'un K_0 valable pour tous les points critiques d'indice q de la carte. L'indice variant entre 0 et p , on généralise cette inégalité à tous les points critiques de la carte et le nombre fini de carte recouvrant la variété M , nous permet de généraliser cette relation à toute la variété. Finalement, cela signifie que les réels K_0 et τ_0 peuvent être choisis indépendants de la feuille et des points critiques considérés.

La suite de la preuve s'applique sans modifications et nous obtenons ainsi un champ borélien $\omega_{0,x}$ de formes correspondant à la partie principale des formes propres approchées du Laplacien de De Rham feuilleté, modulo une approximation valable dans toute la variété M . Ces formes dépendent mesurablement du point critique et nous connaissons leur expression précise le long des variétés stables et instables.

7.2.4 Première estimation des produits scalaires

Pour obtenir une approximation des produits scalaires non nuls $N_{x,y,\tau}$, il faut d'abord localiser la partie principale de ces expressions. Pour cela, on construit une fonction de localisation au voisinage des points critiques. Soit un point critique x d'indice q et un point critique y d'indice $q+1$. Définissons la fonction $\chi_{x,y}$ de classe \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs dans $[0; 1]$ en posant :

$$\chi_{y,x} = \begin{cases} 1 & \text{dans la boule } B(y, \frac{1}{2}d_{Agmon}(y, x) - \eta) \\ 0 & \text{dans la boule } B(x, \frac{1}{2}d_{Agmon}(y, x) - \eta) \end{cases}$$

D'après la proposition 2.2.2 et sachant que tous les points critiques sont de Morse, il existe β_0 tel que pour tous points critiques x et y , on a $d_{Agmon}(x, y) \geq \beta_0$. En choisissant $\eta = \frac{\beta_0}{4}$, la constante ne dépend plus des points critiques.

A l'aide de la fonction $\chi_{y,x}$, le terme $N_{x,y,\tau}$ se décompose sous forme d'une somme de trois termes :

$$N_{x,y,\tau} = \langle (1 - \chi_{y,x}) \omega_{y,\tau}; d_\tau^q \omega_{x,\tau} \rangle + \langle d_\tau^{q*} \omega_{y,\tau}, \chi_{y,x} \omega_{x,\tau} \rangle - \langle \omega_{y,\tau}, d_\tau \chi_{y,x} \wedge \omega_{x,\tau} \rangle$$

Le terme prépondérant dans le membre de droite est $-\langle \omega_{y,\tau}, d_\tau \chi_{y,x} \wedge \omega_{x,\tau} \rangle$. Pour prouver cette affirmation, il faut faire appel à la localisation des formes $\omega_{x,\tau}$ au voisinage des points critiques et plus précisément à leur décroissance exponentielle. Cette approximation est de l'ordre de $e^{-\tau d_{Agmon}(x,y)}$ mais sachant que $d_{Agmon}(x,y) \geq \beta_0$, cela signifie que l'approximation est de l'ordre de $e^{-\tau \beta_0}$ et ne dépend donc plus des points critiques.

Connaissant maintenant la partie prépondérante du produit scalaire $N_{x,y,\tau}$, l'étude des solutions BKW nous donne comme dans le cas classique une première approximation entre les opérateurs de Witten feuilleté et d'orientation feuilleté :

$$N_{x,y,\tau} = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \times \frac{e^{\tau f(x)} \alpha(x)}{e^{\tau f(y)} \alpha(y)} \times \beta_{x,y} + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (7.3)$$

Nous allons modifier légèrement la base adaptée pour obtenir une expression plus simple de la relation 7.3. Pour tout point critique c , posons :

$$\underline{\omega}_{c,\tau} = \frac{1}{e^{\tau f(c)} \alpha(c)} \omega_{c,\tau} \text{ et } \overline{\omega}_{c,\tau} = e^{\tau f(c)} \alpha(c) \omega_{\tau,c}$$

Il est clair que cette modification nous permet de définir deux nouvelles bases $\{\underline{\omega}_{x,\tau}\}_{x \in C^q}$ et $\{\overline{\omega}_{y,\tau}\}_{y \in C^{q+1}}$ de W_τ^q et W_τ^{q+1} respectivement. Ces bases ne sont plus normalisées mais restent orthogonales. La fonction étant de classe \mathcal{C}^2 , cette transformation nous permet de conserver des champs boréliens de formes. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\omega}_{y,\tau}; d_\tau \underline{\omega}_{x,\tau} \right\rangle &= \left\langle e^{\tau f(y)} \alpha(y) \omega_{y,\tau}; d_\tau \left(\frac{1}{e^{\tau f(x)} \alpha(x) \omega_{x,\tau}} \right) \right\rangle \\ &= \frac{e^{\tau f(y)} \alpha(y)}{e^{\tau f(x)} \alpha(x)} \langle \omega_{y,\tau}, d_\tau (\omega_{x,\tau}) \rangle \\ &= \frac{e^{\tau f(y)} \alpha(y)}{e^{\tau f(x)} \alpha(x)} N_{x,y,\tau} \end{aligned}$$

Posons maintenant $\overline{N}_{x,y,\tau} = \left\langle \overline{\omega}_{y,\tau}, d_\tau \underline{\omega}_{x,\tau} \right\rangle$ alors la relation 7.3 s'écrit :

$$\overline{N}_{x,y,\tau} = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \beta_{x,y,\tau} + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (7.4)$$

Posons pour simplifier :

$$\partial_\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} d_\tau$$

Il est clair que le complexe $(\partial_\tau, W_\tau^q)$ calcule la même cohomologie que le complexe de Witten feuilleté. Plus précisément, nous avons :

$$\text{Ker } \partial_\tau = \text{Ker } d_\tau \text{ et } \text{Ker } \partial_\tau^* = \text{Ker } d_\tau^*$$

Ainsi le noyau du Laplacien associé à l'opérateur ∂_τ est encore $\text{Ker } \Delta_\tau$.

Finalement, l'approximation obtenue par *B. Helffer* et *J. Sjöstrand* se généralise au cas feuilletée avec en plus, une estimation valable sur toute la variété indépendamment des feuilles et des points critiques considérés. Nous résumons ce résultat sous forme d'une proposition.

Proposition 7.2.1 *Pour tout point critique x et y d'indice q et $q+1$, on a :*

$$\left\langle \overline{\omega_{y,\tau}}; \partial_\tau \omega_{x,\tau} \right\rangle = \beta_{x,y} + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (7.5)$$

L'estimation signifie précisément qu'il existe τ_0 et K_0 indépendants des points critiques considérés tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, on a :

$$\left| \left\langle \overline{\omega_{y,\tau}}; \partial_\tau \omega_{x,\tau} \right\rangle - \beta_{x,y} \right| \leq \frac{K_0}{\tau} \quad (7.6)$$

Nous avons une relation analogue pour les opérateurs adjoints.

Remarque 7.2.3 *Dans la proposition 7.2.1, nous n'avons pas précisé si les points étaient sur une même feuille car le résultat est vrai même si les points critiques considérés ne sont pas sur la même feuille. Dans ce cas, les produits scalaires associés aux deux opérateurs sont nuls et la relation est donc trivialement vérifiée.*

7.3 Démonstration du théorème principal

7.3.1 Première injection entre les champs de noyaux

Pour démontrer que les complexes de De Rham et d'orientation calculent la même cohomologie, nous allons démontrer que pour $\tau \geq \tau_0$ les complexes de Witten et d'orientation calculent la même cohomologie. Pour cela, nous allons exhiber deux injections entre les champs de noyaux associés à chacun des complexes, modulo l'identification entre W_τ^q et $l^2(C^q)$. L'approximation donnée par la proposition 7.2.1 va nous permettre de construire simplement une injection de $\text{Ker } \Delta^{dR}$ dans $\text{Ker } \Delta^{Or}$.

Proposition 7.3.1 *Il existe τ_0 tel que pour $\tau \geq \tau_0$, il existe une injection mesurable :*

$$i_1^\tau : \text{Ker } \Delta^{dR} \rightarrow \text{Ker } \Delta^{Or}$$

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, remarquons que l'approximation de la proposition 7.2.1 peut être étendue à des combinaisons linéaires de formes $\eta_\tau = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^\tau \overline{\omega_{x_k,\tau}}$. En effet, soit $y \in C^{q+1}$, nous avons par définition :

$$\langle \partial_\tau \eta_\tau; \overline{\omega_{y,\tau}} \rangle = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^\tau \left\langle \partial_\tau \omega_{x_k,\tau}; \overline{\omega_{y,\tau}} \right\rangle$$

Mais nous savons que pour chaque y fixée, il n'y a qu'un nombre fini (et au plus N_2) de termes $N_{x,y,\tau}$ non nuls, ce qui est donc aussi le cas des termes $\langle \partial_\tau \omega_{x_k,\tau}; \overline{\omega_{y,\tau}} \rangle$. Cela implique que la somme est en fait une somme finie dont le nombre de termes est majoré par une constante indépendante des points critiques considérés. L'approximation de la proposition 7.2.1 nous permet donc d'obtenir l'approximation suivante valable pour tout $\eta_\tau \in W_\tau^q$ et pour tout $y \in C^{q+1}$:

$$\langle \partial_\tau \eta_\tau; \overline{\omega_{y,\tau}} \rangle = \langle \delta c_{\eta_\tau}; y \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (7.7)$$

avec c_{η_τ} l'analogue de η_τ via l'identification entre W_τ^q et $l^2(C^q)$. Nous pouvons maintenant nous intéresser à la construction de l'injection.

Preuve de la proposition 7.3.1 : Pour démontrer cette proposition, nous commençons par prouver l'existence d'une injection mesurable, dès que $\tau \geq \tau_0$, de $\text{Ker } \Delta_\tau$ dans $\text{Ker } \Delta^{Or}$.

Considérons un élément η_τ appartenant au noyau du Laplacien de l'opérateur ∂_τ , c'est-à-dire à $\text{Ker } \Delta_\tau$. Cela revient à choisir η_τ vérifiant :

$$\partial_\tau \eta_\tau = 0 \text{ et } \partial_\tau^* \eta_\tau = 0 \quad (7.8)$$

Notons c_{η_τ} l'image de η_τ dans $l^2(C^q)$ via l'identification avec W_τ . On peut décomposer cet élément dans la base des points critiques :

$$c_{\eta_\tau} = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^\tau x_k^q$$

On suppose enfin que c_{η_τ} est unitaire et cela revient à imposer la condition :

$$\sum_{k \geq 1} (\lambda_k^\tau)^2 = 1$$

Par définition de η_τ et d'après la relation 7.7, on a pour tout $y \in C^{q+1}$:

$$\langle \delta c_{\eta_\tau}; y \rangle = O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right)$$

D'après la théorie de Hodge classique, il est possible d'associer à c_{η_τ} un élément ξ_τ avec de bonnes propriétés résumées dans le lemme suivant :

Lemme 7.3.1 *Soit a_τ un élément de $l^2(C^q)$ tel que :*

$$\forall y \in C^{q+1} \quad \langle \delta a_\tau; y \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau)) \quad (7.9)$$

Alors il existe un élément b_τ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\delta a_\tau = \delta b_\tau$;
- $\forall x \in C^q \quad \langle b_\tau; x \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau))$.

De plus, l'application qui à a_τ associe b_τ est linéaire.

Nous allons démontrer ce résultat en construisant explicitement l'élément correspondant.

Preuve du lemme 7.3.1 : Soit a_τ un élément de $l^2(C^q)$ vérifiant la propriété 7.9. Comme $\delta^2 = 0$, on peut décomposer l'espace $l^2(C^q)$ sous la forme suivante :

$$l^2(C^q) = (\text{Ker } \Delta^{Or,q}) \oplus (\text{Ker } \delta^{q-1*})^\perp \oplus (\text{Ker } \delta^q)^\perp$$

D'après cette décomposition, a_τ se décompose sous la forme suivante :

$$a_\tau = x_1^\tau + x_2^\tau + x_3^\tau$$

avec $x_1^\tau \in \text{Ker } \Delta^{Or,q}$, $x_2^\tau \in (\text{Ker } \delta^{q-1*})^\perp$ et $x_3^\tau \in (\text{Ker } \delta^q)^\perp = \overline{\text{Im } \delta^{q*}}$. Remarquons tout d'abord que par définition, on a :

$$\delta a_\tau = \delta x_3^\tau$$

L'élément x_3^τ sera le bon candidat. Il nous faut pour cela prouver que l'on peut le choisir aussi petit que δa_τ au sens de la relation 7.9.

Considérons la restriction du Laplacien d'orientation à $(\text{Ker } \delta^q)^\perp$, on note $\widetilde{\Delta^{Or}}$ cet opérateur restreint. On vérifie immédiatement que pour tout x dans C^q :

$$\langle \widetilde{\Delta^{Or}} x_3^\tau; x \rangle = \langle \delta^* \delta x_3^\tau; x \rangle = \langle \delta x_3^\tau; \delta x \rangle$$

Nous pouvons décomposer δx dans la base de point critiques C^{q+1} :

$$\delta x = \sum_{j \geq 1} \langle \delta x; y_j \rangle y_j = \sum_{j \geq 1} \beta_{x,y_j} y_j$$

où la somme est une somme finie d'au plus N_2 termes et de plus, $|\beta_{x,y_j}| \leq N_1$. Nous en déduisons donc que :

$$\langle \widetilde{\Delta^{Or}} x_3^\tau; x \rangle = \sum_{j \in I_{N_2}} \beta_{x,y_j} \langle \delta x_3^\tau; y_j \rangle$$

Mais d'après l'hypothèse sur a_τ , cela implique que pour tout x dans C^{q+1} :

$$\langle \widetilde{\Delta^{Or}} x_3^\tau; x \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau))$$

Considérons maintenant un point critique x d'indice q et supposons que $x \in \text{Im } \widetilde{\Delta^{Or}}$ alors $x = \widetilde{\Delta^{Or}} z$ et ainsi :

$$\langle x_3^\tau; x \rangle = \langle x_3^\tau; \widetilde{\Delta^{Or}} z \rangle = \langle \widetilde{\Delta^{Or}} x_3^\tau; z \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau))$$

avec une approximation indépendante de x . Par densité de $\text{Im } \widetilde{\Delta^{Or}}$ dans $(\text{Ker } \widetilde{\Delta^{Or}})^\perp$, on en déduit que si $x \in (\text{Ker } \widetilde{\Delta^{Or}})^\perp$, on a :

$$\langle x_3^\tau; x \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau))$$

D'autre part, il est clair que si $x \in \text{Ker } \widetilde{\Delta^{Or}}$ alors $\langle x_3^\tau; x \rangle = 0$. Finalement, cela signifie que :

$$\forall x \in C^q \quad \langle x_3^\tau; x \rangle = O_{\mathcal{F}}(s(\tau))$$

La linéarité de l'application $a_\tau \mapsto x_3^\tau$ découle de la construction de l'élément x_3^τ . ■

Appliquons le lemme 7.3.1 à l'élément c_{η_τ} vérifiant :

$$\forall y \in C^{q+1} \quad \langle \delta c_{\eta_\tau}; y \rangle = O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Nous obtenons l'existence d'un élément b_τ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\delta c_{\eta_\tau} = \delta b_\tau$;
- $\forall x \in C^q \quad \langle b_\tau; x \rangle = O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right)$.

Définissons alors l'élément suivant :

$$u_\tau = c_{\eta_\tau} - b_\tau \tag{7.10}$$

D'après les propriétés de l'élément b_τ , l'élément u_τ vérifie :

- $\delta u_\tau = 0$;
- $\forall x \in C^q \quad \langle u_\tau; x \rangle = \langle c_{\eta_\tau}; x \rangle + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right)$.

A l'aide des propriétés analogues pour l'adjoint δ^* , nous construisons un élément \tilde{u}_τ vérifiant :

- $\delta^* \tilde{u}_\tau = 0$;
- $\forall x \in C^q \quad \langle \tilde{u}_\tau; x \rangle = \langle c_{\eta_\tau}; x \rangle + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right)$.

Par construction, l'élément u_τ appartient au noyau de δ et nous allons maintenant prouver qu'il n'appartient pas à l'image de δ^* . Pour cela, nous allons utiliser l'élément \tilde{u}_τ . Rappelons que c_{η_τ} a été choisi unitaire. D'après les propriétés de u_τ et \tilde{u}_τ , nous avons donc :

$$\begin{aligned} \langle u_\tau; \tilde{u}_\tau \rangle &= \langle c_{\eta_\tau}; \tilde{u}_\tau \rangle + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ &= \langle c_{\eta_\tau}; c_{\eta_\tau} \rangle + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ &= 1 + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{7.11}$$

De la même manière, on vérifie que :

$$\|u_\tau\|^2 = \langle u_\tau; u_\tau \rangle = 1 + O_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Cela implique en particulier que pour τ plus grand que τ_0 , u_τ n'est pas nul.

Supposons que u_τ soit un élément de l'image de δ alors on pourrait écrire $u_\tau = \delta^{q-1} \varphi_\tau$ mais cela impliquerait :

$$\langle u_\tau; \tilde{u}_\tau \rangle = \langle \delta^{q-1} \varphi_\tau; \tilde{u}_\tau^q \rangle = \left\langle \varphi_\tau; \underbrace{\delta^{q-1} * \tilde{u}_\tau^q}_0 \right\rangle = 0$$

Cela contredit la relation de normalisation 7.11 pour tout τ plus grand qu'un certain τ_0 .

Finalement, cela signifie que l'élément u_τ appartient au noyau du Laplacien d'orientation modulo l'isomorphisme :

$$\text{Ker } \Delta^{Or} = \text{Ker } \delta / \overline{\text{Im } \delta}$$

Notations 7.3.1

$$\begin{aligned} j_1^\tau : \text{Ker } \Delta_\tau &\rightarrow \text{Ker } \Delta^{Or} \\ \eta_\tau &\longmapsto u_\tau = c_{\eta_\tau} - b_\tau \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que l'application j_1^τ est, pour $\tau \geq \tau_0$, une application linéaire. De plus, elle est injective puisqu'à tout élément de norme 1, on associe un élément de norme presque 1 et en particulier non nul. Enfin, il s'agit bien d'une application bornée. Cela signifie que l'application i_1^τ définit bien une injection mesurable de champs entre $\text{Ker } \Delta_\tau$ et $\text{Ker } \Delta^{Or}$.

D'après le lemme 5.1.1, les champs $\text{Ker } \Delta_\tau$ et $\text{Ker } \Delta^{dR}$ sont mesurablement isomorphes pour tout $\tau > 0$. On en déduit donc qu'il existe, dès que $\tau \geq \tau_0$, une injection mesurable de champs i_1^τ de $\text{Ker } \Delta^{dR}$ dans $\text{Ker } \Delta^{Or}$ et cela achève la démonstration de la proposition 7.3.1. ■

7.3.2 Injection dans l'autre sens

Afin d'achever le preuve du théorème principal, il ne reste plus qu'à prouver l'existence d'une injection de $\text{Ker } \Delta^{Or}$ dans $\text{Ker } \Delta^{dR}$.

Proposition 7.3.2 *Il existe τ_0 tel que pour $\tau \geq \tau_0$, il existe une injection mesurable :*

$$i_2^\tau : \text{Ker } \Delta^{Or} \rightarrow \text{Ker } \Delta^{dR}$$

Preuve de la proposition 7.3.2 : Fixons un indice q et considérons un élément $\xi^q \in \text{Ker } \Delta^{Or,q}$ de norme 1. On veut lui associer linéairement un élément de $\text{Ker } \Delta^{dR}$. Pour simplifier, nous omettrons parfois la référence à l'indice dans ce qui suit.

Remarquons que la fonction considérée est toujours la fonction déformée donc elle n'a que des points critiques de Morse. Sachant que le noyau du Laplacien est égal à l'intersection du noyau de la différentielle et de celui de la différentielle adjointe, cela revient à choisir $\xi \in l^2(C^q)$ vérifiant :

$$\delta\xi = 0 \text{ et } \delta^*\xi = 0 \tag{7.12}$$

Décomposons ξ dans la base de points critiques, $\xi = \sum_{i \geq 1} \lambda_i x_i$ et notons $\omega_{\xi, \tau}$ son image modulo l'identification entre $l^2(C^q)$ et W_τ^q :

$$\omega_\xi = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \omega_{x_i, \tau} \quad (7.13)$$

Nous pouvons supposer que ξ est unitaire et donc ainsi que $\omega_{\xi, \tau}$ est unitaire. Cela nous donne la condition :

$$\sum_{i \geq 1} \lambda_i^2 = 1 \quad (7.14)$$

Introduisons maintenant l'élément suivant :

$$\underline{\omega_{\xi, \tau}} = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_i}{e^{\tau f(x_i)} \alpha(x_i)} \omega_{x_i, \tau} = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \underline{\omega_{x_i, \tau}} \quad (7.15)$$

En particulier, pour tout $y \in C^{q+1}$, nous avons :

$$\left\langle d_\tau \underline{\omega_{\xi, \tau}}; \overline{\omega_{y, \tau}} \right\rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \left\langle d_\tau \underline{\omega_{x_i, \tau}}; \overline{\omega_{y, \tau}} \right\rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \overline{N_{x_i, y, \tau}}$$

Or pour chaque y fixé, il n'y a qu'un nombre fini de termes $\overline{N_{x_i, y, \tau}}$ non nuls, donc la somme est en fait une somme finie. D'après l'approximation sur les produits scalaires et plus précisément la relation 7.4, nous en déduisons que :

$$\left\langle d_\tau \underline{\omega_{\xi, \tau}}; \overline{\omega_{y, \tau}} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \underbrace{\langle \delta \xi; y \rangle}_{=0} + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) = O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (7.16)$$

Définissons maintenant l'élément suivant :

$$v_{\xi, \tau} = e^{\tau f} \underline{\omega_{\xi, \tau}}$$

Par définition de l'opérateur d_τ , on vérifie immédiatement que :

$$dv_{\xi, \tau} = e^{\tau f} (d + \tau df \wedge) \underline{\omega_{\xi, \tau}} = e^{\tau f} d_\tau \underline{\omega_{\xi, \tau}}$$

où d désigne l'opérateur de différentiation feuilleté. Soit alors $y \in C^{q+1}$, par définition, nous savons que :

$$\overline{\omega_{y, \tau}} = e^{\tau f(y)} \alpha(y) \omega_{y, \tau}$$

En décomposant $d_\tau \overline{\omega_{\xi, \tau}}$ dans la base $\{\omega_{y, \tau}\}_{y \in C^{q+1}}$, nous obtenons :

$$dv_{\xi, \tau} = e^{\tau f} \sum_{j \geq 1} \left\langle d_\tau \overline{\omega_{\xi, \tau}}; \omega_{y_j, \tau} \right\rangle \omega_{y_j, \tau} = \sum_{j \geq 1} \left\langle d_\tau \overline{\omega_{\xi, \tau}}; \overline{\omega_{y_j, \tau}} \right\rangle \frac{e^{\tau(f-f(y))}}{\alpha(y)} \omega_{y_j, \tau}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\langle dv_{\xi, \tau}; \omega_{y, \tau} \rangle = \left\langle d_\tau \overline{\omega_{\xi, \tau}}; \overline{\omega_{y, \tau}} \right\rangle \times \frac{1}{\alpha(y)} \left\langle e^{\tau(f-f(y))} \omega_{y_j, \tau}; \omega_{y, \tau} \right\rangle \quad (7.17)$$

D'autre part, nous savons que la forme $\omega_{y,\tau}$ est localisée au voisinage du point critique y et nous connaissons son expression locale (Cf. 5.2.1). Nous vérifions alors sans difficulté que :

$$\langle e^{\tau(f-f(y))} \omega_{y_j,\tau}; \omega_{y,\tau} \rangle \leq 1$$

La relation 7.16, nous permet donc d'en conclure que :

$$\langle dv_{\xi,\tau}; \omega_{y,\tau} \rangle = O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (7.18)$$

Nous procédons maintenant de manière similaire que pour la démonstration de la première injection. Il est clair que le lemme 7.3.1 est encore valable en remplaçant $l^2(C^q)$ par l'ensemble des q -formes, et l'opérateur δ par l'opérateur de dérivation feuilletée d . En appliquant ce résultat à l'élément $v_{\xi,\tau}$, nous obtenons un élément b_τ vérifiant :

$$\begin{aligned} - dv_{\xi,\tau} &= db_\tau; \\ - \forall x \in C^q \quad \langle b_\tau; x \rangle &= O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right). \end{aligned}$$

On définit alors :

$$u_\tau = v_{\xi,\tau} - b_\tau \quad (7.19)$$

D'après les propriétés de l'élément b_τ , l'élément u_τ vérifie :

$$\begin{aligned} - du_\tau &= 0; \\ - \forall x \in C^q \quad \langle u_\tau; x \rangle &= \langle v_{\xi,\tau}; x \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right). \end{aligned}$$

A l'aide des propriétés analogues pour l'opérateur adjoint d^* , nous construisons un élément \tilde{u}_τ vérifiant :

$$\begin{aligned} - d^* \tilde{u}_\tau &= 0; \\ - \forall x \in C^q \quad \langle \tilde{u}_\tau; x \rangle &= \langle \widetilde{v_{\xi,\tau}}; x \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \text{ avec } \widetilde{v_{\xi,\tau}} = e^{-\tau f} \overline{\omega_{\xi,\tau}} = e^{-\tau f} \sum_{i \geq 1} \lambda_i \overline{\omega_{x_i,\tau}}. \end{aligned}$$

Par construction, l'élément u_τ^q appartient au noyau de d et nous allons maintenant prouver qu'il n'appartient pas à l'image de d^* . Pour cela, nous allons utiliser l'élément \tilde{u}_τ . D'après les propriétés de u_τ et \tilde{u}_τ , nous avons :

$$\begin{aligned} \langle u_\tau; \tilde{u}_\tau \rangle &= \langle v_{\xi,\tau}; \tilde{u}_\tau \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \\ &= \langle v_{\xi,\tau}; \widetilde{v_{\xi,\tau}} \rangle + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Or par construction, on a :

$$\langle v_{\xi,\tau}; \widetilde{v_{\xi,\tau}} \rangle = \left\langle \underline{\omega_{\xi,\tau}}; \overline{\omega_{\xi,\tau}} \right\rangle = \langle \omega_{\xi,\tau}; \omega_{\xi,\tau} \rangle = 1$$

D'où finalement :

$$\langle u_\tau; \tilde{u}_\tau \rangle = 1 + O_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (7.21)$$

Supposons que u_τ soit un élément de l'image de d alors, on pourrait écrire $u_\tau = d^{q-1} \varphi_\tau$ mais cela impliquerait :

$$\langle u_\tau; \tilde{u}_\tau \rangle = \langle d^{q-1} \varphi_\tau; \tilde{u}_\tau^q \rangle = \left\langle \varphi_\tau^{q-1}; \underbrace{d^{q-1} * \tilde{u}_\tau^q}_0 \right\rangle = 0$$

Cela contredit la relation de normalisation 7.21 pour tout τ plus grand qu'un certain τ_0 .

Finalement, cela signifie que l'élément u_τ appartient au noyau du Laplacien de De Rham feuilleté modulo l'isomorphisme :

$$\text{Ker } \Delta^{dR} = \text{Ker } d/\overline{\text{Im } d}$$

Introduisons la notation suivante.

Notations 7.3.2

$$\begin{aligned} i_2^\tau &: \text{Ker } \Delta^{Or} \rightarrow \text{Ker } \Delta^{dR} \\ \xi &\longmapsto u_\tau = v_{\xi,\tau} - b_\tau \end{aligned}$$

L'application i_2^τ est, pour $\tau \geq \tau_0$, une application linéaire. De plus, elle est injective puisqu'à tout élément de norme 1, on associe un élément non nul (Cf. 7.21). Enfin, il s'agit bien d'une application bornée. Cela signifie que l'application i_2^τ définit bien une injection mesurable de champs entre $\text{Ker } \Delta^{Or}$ et $\text{Ker } \Delta^{dR}$ et cela achève donc la démonstration de la proposition 7.3.2.

7.3.3 Fin de la démonstration

Nous venons d'exhiber deux injections de champs mesurables, une dans chaque sens, entre le champ des noyaux du Laplacien d'orientation et le champ des noyaux du Laplacien de De Rham. Pour démontrer l'existence d'un isomorphisme de champs, nous allons faire appel à la dimension de Murray Von Neumann. Pour simplifier les notations, on note, dans cette partie, H^{dR} le champ de des noyaux du Laplacien de De Rham et H^{Or} celui du Laplacien d'orientation.

Tout d'abord, quitte à considérer la décomposition polaire, on peut supposer que les injections i_1 et i_2 sont des isométries sur leur support. Cela nous permet d'affirmer que les images de ces injections sont fermées. Posons alors :

$$K_1 = i_1(H^{dR})$$

L'injection i_2 envoie K_1 sur un sous-espace fermé K_2 de H^{dR} . Comme K_2 est l'image de la composée de deux injections, la dimension de Murray-Von Neumann de K_2 est égale à celle de H^{dR} . Cela signifie donc que la dimension de $H^{dR} \ominus K_2$ est nulle. La dimension étant donnée par une trace fidèle, cela signifie que $H^{dR} \ominus K_2$ est réduit à 0.

Or par construction, l'image de $(K_1)^\perp$ par l'injection i_2 est incluse dans $H^{dR} \ominus K_2$, ce qui implique que $(K_1)^\perp$ est lui aussi réduit à 0. Cela nous donne donc que $K_1 = H^{Or}$, c'est-à-dire que l'injection i_1 est un isomorphisme de champs.

Finalement, nous venons de démontrer que les injections de champs mesurables que nous avons exhibées sont des isomorphismes de champs mesurables. Nous pouvons donc

affirmer que les champs de noyaux du Laplacien de De Rham et du Laplacien d'orientation sont mesurablement isomorphes en tant que champ, ce qui revient à dire que les complexes d'orientation et de De Rham calculent la même cohomologie. Cela achève donc la preuve du résultat principal :

$$\text{Ker } \Delta^{Or,q} \cong \text{Ker } \Delta^{dR,q}$$

Un corollaire direct de ce théorème est la validité des inégalités de Morse feuilleté faibles et fortes, résultat qui a d'ailleurs été démontré dans le travail *A. Connes et T. Fack* auquel nous avons régulièrement fait référence.

Théorème 7.3.1 (*Inégalités de Morse pour un feuilletage mesuré [17]*)

Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage mesuré de dimension p , sur une variété compacte M de dimension n , muni d'une mesure transverse invariante Λ . Soit aussi f une fonction de Morse feuilletée généralisée sur M . Pour tout $0 \leq q \leq p$, si β^q désigne les nombres de Betti du feuilletage (M, \mathcal{F}) et c^q la mesure transverse de C^q l'ensemble des points critiques de Morse d'indice q , alors pour tout $0 \leq q \leq p$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} \beta^k \leq \sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} c^k$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $q = p$.

Preuve du Théorème 7.3.1 : Soit $0 \leq q \leq p$. Rappelons que nous avons la décomposition suivante :

$$l^2(C^q) = \text{Ker } \Delta^{Or} \oplus (\text{Ker } \delta^q)^\perp \oplus (\text{Ker } \delta^{q-1*})^\perp$$

En particulier sachant que $\dim_\Lambda (l^2(C^q)) = c^q$ par définition et que $\dim_\Lambda (\text{Ker } \Delta^{Or}) = \beta^q$ d'après le théorème 0.1, nous en déduisons que :

$$\sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} (c^k - \beta^k) = \dim_\Lambda (\text{Ker } \delta^q)^\perp \geq 0$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $q = p$ car $d^p = 0$.

■

Bibliographie

- [1] S. Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N -body Schrödinger operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, 1982.
- [2] P. Alsholm and G. Schmidt. *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators*. Various Publications Series, No. 7. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1969.
- [3] V. I. Arnol'd. *Catastrophe theory*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1986. Translated from the Russian by G. S. Wassermann, based on a translation by R. K. Thomas.
- [4] F. A. Berezin and M. A. Shubin. *The Schrödinger Equation*. Mathematics and its Applications. Springer, 1991.
- [5] R. Bott. Lectures on morse theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7(2) :331–358, 1982.
- [6] R. Bott and L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 1982. corr. 3rd printing edition, 4 1995.
- [7] D. Burghelea. Lectures on witten helffer sjörstrand theory. Preprint Ohio State University, 1998.
- [8] B. Candelpergher and J-C. Nosmas. Propriétés spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques autoadjoints. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(2) :137–167, 1984.
- [9] D. Castelvechi. The foliated morse inequalities. Thesis, 2001.
- [10] P. Chand and J. Hoekstra. A review of the semi classical wkb approximation and its usefulness in the study of quantum systems, 2001. Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Departement of Electrical Engineerings.
- [11] K-C. Chang. *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 6. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [12] I. Chavel. *Riemannian geometry—a modern introduction*, volume 108 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [13] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique I*. Hermann, 10 1997.

- [14] A. Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, volume 725 of *Lecture Notes in Math.*, pages 19–143. Springer, Berlin, 1979.
- [15] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. *Proceedings of Symposia in Pure Maths*, 38 :521–628, 1982.
- [16] A. Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [17] A. Connes and T. Fack. Morse inequalities for measured foliations, 1991. Preprint Université Claude Bernard Lyon 1.
- [18] A. Connes and T. Fack. c^* -algebras and elliptic theory. *Trends in Mathematics*, pages 61–72, 2006. Morse Inequalities for Foliations.
- [19] R. Coqueraux. Espaces fibrés et connexions. Livre sur internet, 2002.
- [20] O. Cornea and A. Ranicki. Rigidity and glueing for morse and novikov complexes. *J. Eur. Math. Soc.*, 5 :343–394, 2003.
- [21] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1987.
- [22] G. De Rham. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et augmentée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, III, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1222b.
- [23] J-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [24] M. Demazure. *Catastrophes et bifurcations*. Editions Marketing, 1989.
- [25] J. Dodziuk. De rham-hodge theory for l^2 -cohomology of infinite coverings. *Topology*, 16 :157–165, 1977.
- [26] J. Dodziuk. Sobolev spaces of differential forms and de rham-hodge isomorphism. *J. Differential Geometry*, 16 :63–73, 1981.
- [27] V. K. Dodziuk and J. Patodi. Riemannian structures and triangulations of manifolds. *J. Indian Math. Soc.*, 40 :1–52, 1976.
- [28] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications, tomes I, II & III*. “Mir”, 1982. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs.
- [29] J. L. Dupont. Simplicial de rham cohomology and characteristic of flat bundles. *Topology*, 15 :233–245, 1976.
- [30] Y.M. Eliashberg and N. M. Mishachev. Wrinkling on smooth mappings ii. wrinkling of embeddings and k. igusa' theorem. *Topology*, 39 :711–732, 2000.
- [31] T. Fack. Sur la notion de valeur caractéristique. *J. Operator Theory*, 7(2) :307–333, 1982.
- [32] T. Fack and H. Kosaki. Generalized s -numbers of τ -measurable operators. *Pacific J. Math.*, 123(2) :269–300, 1986.

- [33] K. O. Friedrichs. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space (Lectures in Applied Math V003)*. American Mathematical Society, 6 1967.
- [34] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [35] A. Gramain. *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France, Paris, 1971. Collection SUP : “Le Mathématicien”, 7.
- [36] G. Hector and U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations. Part A*, volume 1 of *Aspects of Mathematics*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, second edition, 1986. Foliations on compact surfaces, fundamentals for arbitrary codimension, and holonomy.
- [37] G. Hector and U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations. Part B*. Aspects of Mathematics, E3. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, second edition, 1987. Foliations of codimension one.
- [38] J. L. Heitsch and C. Lazarov. Homotopy invariance of foliations betti numbers. *Inventiones mathematicae*, 104(1) :321–347, 1991.
- [39] B. Helffer. Etude du laplacien de witten associé à une fonction de morse dégénérée, 1985.
- [40] B. Helffer. *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics*, volume 1 of *Series on Partial Differential Equations and Applications*. World Scientific Publishing Co. Inc., 2002.
- [41] B. Helffer. 30 ans d’analyse semi-classique : Bibliographie commentée, 2003.
- [42] B. Helffer. Introduction to the semi-classical method for the schrödinger operator with magnetic field, 2005. Actes de l’Ecole CIMPA de Damas (2004).
- [43] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit i. *Commun. in PDE*, 9(4) :337–408, 1984.
- [44] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit iii. *Math.Nachrichte*, 124 :263–313, 1985.
- [45] B. Helffer and J. Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique ii -interaction moléculaire-symétries-perturbations. *Annales de l’IHP (section Physique théorique)*, 42(2) :127–212, 1985.
- [46] B. Helffer and J. Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique iv -etude du complexe de witten. *Commun. in PDE*, 10(3) :245–340, 1985.
- [47] B. Helffer and J. Sjöstrand. Effet tunnel pour l’équation de schrödinger avec champ magnétique, 1987.
- [48] G. Henniart. Les inégalités de Morse (d’après E. Witten), 1985. Seminar Bourbaki, Vol. 1983/84.
- [49] M. Hilsen. The signature operator of lipschitz manifolds and unbounded kasparov modules. *Lecture Notes Math.*, 1132 :254–288, 1985.
- [50] K. Igusa. The space of framed functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301 :437–477, 1987.

- [51] K. Igusa. The stability theorem for smooth pseudoisotopies. *K-Theory*, 2 :1–355, 1988.
- [52] K. Igusa. c^1 local parametrized morse theory. *Topology and its applications*, 36 :209–231, 1990.
- [53] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators (Classics in Mathematics)*. Springer, 2nd edition, 2 1995.
- [54] Y. A. Kordyukov. Noncommutative spectral geometry of Riemannian foliations. *Manuscripta Math.*, 94(1) :45–73, 1997.
- [55] J. Lafontaine. *Introduction aux varietes differentielles*. EDP Sciences, 1 1996.
- [56] A. Messiah. *Mécanique quantique tome 1*. Dunod, 2003.
- [57] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, 1963.
- [58] G. Mircea. A local solution of the schrödinger equation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(43) :8669–8676, 1998.
- [59] A. Mohamed and J. Nourrigat. Borne inférieure du spectre de l’opérateur de Schrödinger. (Lower bound for the spectrum of the Schrödinger operator). 1988.
- [60] C. C. Moore and C. Schochet. *Global analysis on foliated spaces*, volume 9 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Springer-Verlag, New York, 1988. With appendices by S. Hurder, Moore, Schochet and R. J. Zimmer.
- [61] P. K. Patnaik. Rayleigh-schrödinger perturbation theory for the anharmonic oscillator. *Phys. Rev. D*, 35(4) :1234–1238, Feb 1987.
- [62] M. M. Peixoto. On structural stability. *Annals of mathematics*, 69(1) :199–222, 1959.
- [63] M. Q. Phan. *Introduction à la géométrie des variétés différentielles*. Dunod, 1969.
- [64] M. Pozniak. Floer homology, novikov rings and clean intersections. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 196(2) :119–181, 1999.
- [65] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1 : Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [66] B. L. Reinhart. *Differential geometry of foliations*, volume 99 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. The fundamental integrability problem.
- [67] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [68] M. Schwarz. *Morse Homology (Progress in Mathematics)*. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2 2004.
- [69] B. Simon. Instantons, doubles wells and large deviations. *Bulletin of the american mathematical society*, 8(2) :323–326, 1983.
- [70] B. Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. I. non-degenerate minima : asymptotic expansions. *Ann. Inst. Henri Poincaré (A)*, 38(3) :295–308, 1983.

- [71] B. Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. II. tunneling. *Ann. Math.*, 120 :89–118, 1984.
- [72] F. Truc. Valeurs propres semi-classiques d’un opérateur de schrödinger avec potentiel dégénéré. Preprint Institut Fourier, 1998.
- [73] J. Weber. The morse-witten complex via dynamical systems, 2004.
- [74] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, 17(4) :661–692 (1983), 1982.
- [75] M. Znojil. Generalized rayleigh-schroedinger perturbation theory as a method of linearization of the so called quasi-exactly solvable models. *PART*, 2 :777, 2002.

Résumé : A toute fonction de Morse généralisée f sur un feuilletage mesuré, nous associons un complexe longitudinal dont nous montrons qu'il calcule la cohomologie longitudinale introduite par A. Connes. L'espace d'indice q de ce complexe est donné par le champ d'espaces $E^q = (l^2(C^q \cap L))_L$, où C^q est la variété des points critiques longitudinaux d'indice q de f , et où L désigne la feuille générique. Les différentielles $\delta^q : E^q \rightarrow E^{q+1}$ expriment comment l'orientation de la variété instable se transporte le long d'une trajectoire du champ de gradient feuilleté reliant un point critique d'indice q à un point critique d'indice $q + 1$. Pour montrer que ce complexe calcule la cohomologie longitudinale, nous l'identifions au complexe obtenu comme limite, lorsque $\tau \rightarrow \infty$, du complexe feuilleté $(W_{\tau,L}^q, d_{\tau,L}^q)$ considéré par A. Connes et T. Fack. Ce travail étend au cas des feuilletages celui de B. Helffer et J. Sjöstrand.

Mots-clés : Cohomologie, feuilletage mesuré, complexe de De Rham, complexe de Witten, complexe d'orientation.

Foliated manifolds cohomology.

Abstract : We associate to each foliated Morse function f on a measured foliation a longitudinal complex which computes the longitudinal cohomology introduced by A. Connes, as we prove. The q index space of this complex is given by the field $E^q = (l^2(C^q \cap L))_L$, where C^q denotes the manifold of the q index longitudinal critical points of the generalized Morse function, and where L is a generic leaf. The differential $\delta^q : E^q \rightarrow E^{q+1}$ is defined by studying how the orientation of the unstable manifold is carried along a trajectory linking to a q index critical point and a $q + 1$ index critical point. To prove that this complex computes the longitudinal cohomology, we show that it can be seen as the limit, when $\tau \rightarrow \infty$, of a foliated complex $(W_{\tau,L}^q, d_{\tau,L}^q)$ considered by A. Connes and T. Fack. This extends to the foliated case a result of B. Helffer et J. Sjöstrand.

Keywords : Cohomology, measured foliation, De Rham's complex, Witten's complex, oriented complex.

Discipline : Mathématiques

Laboratoire : Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208, Université Claude Bernard Lyon1, 69622 Villeurbanne Cedex.